

تمرين 1

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 3}{4 - u_n} \end{cases}$$

(1) بين : أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : -1 \leq u_n \leq 3$

(2) ادرس رتبة المتتالية (u_n)

(3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

(4) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

(a) بين أن المتتالية (v_n) هندسية حدد أساسها وحدها الأول.

(b) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n واستنتج $\lim u_n$ و $\lim v_n$.

(c) أحسب $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $\lim S_n$.

(d) أحسب $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_n$

تمرين 2

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} \end{cases}$$

(1) بين : أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n < \sqrt{3}$

(2) ادرس رتبة المتتالية (u_n)

(3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.

(a) بين أن المتتالية (v_n) حسابية حدد أساسها وحدها الأول.

(b) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n واستنتج $\lim u_n$.

تمرين 3

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}u_n^3 + 2} \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية $v_n = u_n^3 - 3$

(1) بين : أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq \sqrt[3]{3}$

(2) ادرس رتبة المتتالية (u_n)

(3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

(4) بين أن المتتالية (v_n) هندسية (a) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n

(c) أحسب $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $\lim S_n$.

(d) أحسب $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_n$

تمرين 4

$$\begin{cases} u_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - u_n}{2}} \end{cases}$$

(1) بين : أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 1$

$$v_n = \frac{\pi}{3} - \arccos(u_n)$$

(3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي

(a) بين أن $(\forall x \in [0, 1]) : \arccos \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos(x)$

(b) بين أن المتتالية (v_n) هندسية وحدد أساسها وحدها الأول.

(c) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n .

تمرين 5

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n) \end{cases}$ ونضع $v_n = \frac{u_n}{2^n}$

(1) بين أن المتتالية (v_n) حسابية وحدد أساسها وحدها الأول .
(2) احسب v_n ثم u_n بدلالة n واستنتج $\lim u_n$.

تمرين 6

ليكن $\alpha \in]0, \pi[$

نعتبر المتتالية $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $P_n = \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$

(1) بين أن المتتالية (P_n) هندسية حدد أساسها وحدها الأول .
(2) استنتج $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$ بدلالة n .

تمرين 7

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$ و $u_0 = 1$

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}; 0 < u_n < 2)$. ادرس رتبة المتتالية (u_n) .
(2) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.
(3) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}): 2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.
(4) استنتج بطريقة أخرى أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.
(5) نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}): S_n \geq 2n - 3 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$ واحسب $\lim S_n$.

تمرين 8

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_{n+1} = 1 - \sqrt[3]{5 - 3u_n}$ و $u_0 = -\frac{1}{3}$

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}): -1 < u_n < 0$.
(2) ادرس رتبة المتتالية (u_n) .
(3) استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}): 0 < u_n + 1 < \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3}$.
(b) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 9

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{6x}{x^3 + 4}$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة f .
(2) بين أن f تقابل من $[0, \sqrt[3]{2}]$ نحو مجال يجب تحديده .
(3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}): 1 \leq u_n < \sqrt[3]{2}$.
(b) بين أن (u_n) تزايدية واستنتج أنها مقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 10

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_{n+1} = \frac{2(n^2 + n + 1) + nu_n}{(n+1)^2}$ و $u_1 = \alpha \in \mathbb{R}$

(1) بين أن (u_n) رتيبة ومحدودة واحسب نهايتها l .
(2) أحسب $u_{n+1} - l$ بدلالة $u_n - l$ واستنتج u_n بدلالة n و α .

تمرين 11

(1) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$
بين أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها .

(2) نفس السؤال بالنسبة لـ $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k+1}}$

تمرين 12

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

(1) بين أن $\lim u_n = +\infty$

(2) بين أن $(\forall k \geq 1): 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$ واستنتج $E(u_{10^6})$.

تمرين 13

(1) بين أنه إذا كانت (u_n) متتالية تزايدية وغير مكبورة فإن $\lim u_n = +\infty$

(2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

(a) بين أن $(\forall n \geq 1): u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

(b) واستنتج أن $\lim u_n = +\infty$

(c) بين أن $u_{1024} \geq 6$ واستنتج عدد طبيعي n بحيث $u_n \geq 1000$

تمرين 14

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^k}$

(1) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة لتكن l نهايتها .

(2) بين أن $0 \leq l - u_N \leq \frac{1}{N(N+1)^N}$ لكل N من \mathbb{N}^*

(3) استنتج قيمة مقربة للعدد l بالدقة 10^{-4}

تمرين 15

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2^n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}): 0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أن $u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(2) بين أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$

(3) بين أن $(\forall n \geq 2): u_n > \frac{1}{2^n - 1}$ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ تناقصية قطعاً .

تمرين 16

لتكن $(a_n)_{n \geq 0}$ متتالية عددية نضع $b_n = \frac{a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \dots + 2^n a_n}{2^{n+1}}$

بين ما يلي :

(1) إذا كانت (a_n) تزايدية وموجبة فإن (b_n) تزايدية .

(2) إذا كانت (a_n) مكبورة بـ $M \geq 0$ فإن (b_n) مكبورة بـ M

(3) إذا كانت (a_n) تتوّل إلى 0 فإن (b_n) تتوّل إلى 0 .

(4) إذا كانت (a_n) تتوّل إلى 1 فإن (b_n) تتوّل إلى 1 .

تمرين 17

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 \geq 2$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = u_n^2 - \frac{2n}{n+1}$

- (1) بين أن $u_n \geq 4$ ($\forall n \geq 1$) واستنتج أن (u_n) غير متقاربة .
- (2) (a) $(\forall n \geq 0) : u_{n+1} - u_n \geq (u_n + 1)(u_n - 2)$ (b) استنتج أن (u_n) تزايدية .
- (3) هل المتتالية (u_n) مكبورة ؟

تمرين 18

(1) بين أن لكل $n \geq 1$ المعادلة $x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - \frac{n+1}{n} = 0$ تقبل حلا وحيدا في \mathbb{R}^+ وأن

$$u_n \in]0, 1[$$

- (2) بين أن المتتالية (u_n) تناصية .
- (3) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 19

نعتبر الدالة : $f(x) = 2x^3 + x - 1$

- (1) ادرس تغيرات f . واستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0 < \alpha < 1$.
- (2) نعتبر المتتاليتين (u_n) , (v_n) , المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = v_n \text{ si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

- (a) احسب u_1, v_1, u_2, v_2 .
- (b) بين أن $0 \leq u_n \leq 1$ و $0 \leq v_n \leq 1$ لكل n من \mathbb{N} .
- (c) بين أن (u_n) مكبورة بالعدد α و (v_n) مصغورة بالعدد α .
- (d) بين أن (u_n) , (v_n) متحاذيتان وحدد نهايتهما .

تمرين 20

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 4}$

ونعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- (1) (a) ادرس تغيرات f على \mathbb{R}^+ . (b) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$

(c) بين أن $(\forall (x, y) \in [0, 1]^2) : |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

(2) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

(3) (a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

(b) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة واحسب نهايتها .

(4) نضع $w_n = u_{2n+1}$ و $v_n = u_{2n}$

(a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) w_n < \alpha < v_n$

(b) ادرس رتبة (v_n) و (w_n)

(3) (a) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_{n+1} - w_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - w_n)$.

(b) بين أن (v_n) و (w_n) متحاديتان وحدد نهايتهما المشتركة .

تمرين 21

نعتبر المتتاليتين v_n, u_n المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 & \text{et} & v_1 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n + v_n}{6} & \text{et} & v_{n+1} = \frac{u_n + (\alpha - 1)v_n}{\alpha} \quad (\alpha > \frac{6}{5}) \end{cases}$$

- (1) بين أن $u_n < v_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) وأن (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية .
 (2) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{5}{6}(v_n - u_n)$ واستنتج أن (u_n) و (v_n) متحاديتان .
 (3) بين أن $6\alpha u_{n+2} - (11\alpha - 6)u_{n+1} + (5\alpha - 6)u_n = 0$ واستنتج u_n ثم v_n بدلالة α و n .

تمرين 22

$$\begin{cases} u_0 = a & v_0 = b \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} & v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

- (1) بين أن (u_n) ; (v_n) متحاديتان .
 (2) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{8a}(v_n - u_n)^2$
 (3) استنتج تأطير كل من العددين $l - v_n$ و $l - u_n$ حيث $l = \lim u_n = \lim v_n$

تمرين 23

لكل n من \mathbb{N}^* نعتبر الدالة f_n المعرفة على \mathbb{R}^+ بمايلي : $f_n(x) = 3x^n - x - 1$

- (1) (a) بين أن f_n تزايدية على $\left[\sqrt[n-1]{\frac{1}{3n}}, +\infty \right[$ وتناقصية على $\left] 0, \sqrt[n-1]{\frac{1}{3n}} \right[$.
 (b) ضع جدول تغيرات f_n واستنتج إشارتها .
 (2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $[0, +\infty[$.
 (3) أحسب $f_n(1)$ واستنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n < 1$
 (4) (a) بين أن : $(\forall x \in]0, 1[) : f_{n+1}(x) < f_n(x)$
 (b) استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية .
 (c) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة .
 (5) نضع $\lim u_n = l$
 (a) بين $0 \leq l \leq 1$.
 (b) بين : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \leq l$.
 (c) بين أن $l = 1$

تمرين 24

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ بمل يلي : $f(x) = x + \cos(x)$

- (1) أدرس تغيرات الدالة f واستنتج أن $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$(2) \text{ نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة بما يلي : } \begin{cases} u_0 = \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(a) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$

(b) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

(c) استنتج أن (u_n) متقاربة وأحسب نهايتها .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n = \frac{\pi}{2} - u_n$

(a) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq v_n \leq \frac{\pi}{2}$

(b) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_{n+1} = v_n - \sin(v_n)$

(4) نقيّل أن : $(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]) : 0 \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$

(a) بين $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{6} v_n^3$

(b) استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3^n-1}{2}} v_0^{(3^n)}$

(c) نفترض أن $\alpha = 1,57$

إذا علمنا أن 3,14 قيمة مقربة بتفريط للعدد π بالدقة $2 \cdot 10^{-3}$ ، بين أن u_2 قيمة مقربة بتفريط

للعدد $\frac{\pi}{2}$ بالدقة 10^{-30} .