

LES FONCTIONS LOGARITHMES الدوال اللوغاريتمية

*نهايات مرجعية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x[\ln(x)]^n] = 0 ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^n}{x} = 0$$

حالة عامة :

الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}; \forall x \in \mathbb{R}_+^*; \text{Log}_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\text{Log}_a 1 = 0 ; \quad \text{Log}_a(a) = 1$$

$$\forall r \in \mathbb{Q} ; \quad \begin{cases} \text{Log}_a(x^r) = r \text{Log}_a x \\ \text{Log}_a(a^r) = r \end{cases}$$

$$\text{Log}_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

*الدالة ln هي دالة اللوغاريتم ذات الأساس e

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*; \text{Log}_e x = \ln x$$

اللوغاريتم العشري :

دالة اللوغاريتم ذات الأساس 10 تسمى اللوغاريتم العشري

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*; \log_{10} x = \log x$$

$$\log 1 = 0 \quad \log 10 = 1$$

$$\forall m \in \mathbb{Z}; \log(10^m) = m$$

*المشتقة اللوغاريتمية :

$$\forall x \in I; (\ln|U(x)|)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

مع $U(x)$ لا تنعدم على المجال I

تسمى دالة اللوغاريتم

$$\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x)$$

الدالة :

النيري

وهي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على \mathbb{R}_+^* والتي

تتعدم في 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in]0; +\infty[; [\ln(x)]' = \frac{1}{x} \\ \ln(1) = 0 \end{array} \right. \text{ ولدنا :}$$

$$\ln 1 = 0 ; \ln e = 1 ; \ln \frac{1}{e} = -1 ; \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$$

avec $e = 2,718281828$ et $e \notin \mathbb{Q}$ mais $e \in \mathbb{R}$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*; \forall b \in \mathbb{R}_+^* ; \forall r \in \mathbb{Q}$$

* $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

* $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ * $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

* $\ln(a^r) = r \ln a$ * $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

*النهايات عند المحدثات :

$$(\ln a = \ln b) \Leftrightarrow (a = b)$$

$$(\ln a > \ln b) \Leftrightarrow (a > b)$$

*الرتابة :

*الدالة ln تزايدية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$

الإشارة

$$\forall x \in]0; +\infty[; \left\{ \begin{array}{l} (x > 1) \Leftrightarrow (\ln x > 0) \\ (0 < x < 1) \Leftrightarrow (\ln x < 0) \\ (1 < x < e) \Leftrightarrow (0 < \ln x < 1) \\ (x > e) \Leftrightarrow (\ln x > 1) \end{array} \right.$$

الدوال الأسية LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

*الدالة \ln متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$.

إن فهي تقابل من $]0, +\infty[$ نحو \mathbb{R} .
دالتها العكسية تسمى: الدالة الأسية النيبيرية.

$$\boxed{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*}$$

$$x \mapsto e^x$$

و هي الدالة المعرفة كما يلي:

ولدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}_+^* (e^x = y) \Leftrightarrow (\ln y = x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; \ln(e^x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*; e^{\ln x} = x$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e}; e^0 = 1; e^1 = e$$

*الدالة $x \mapsto e^x$ متصلة و تزايدية قطعاً على \mathbb{R} .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} (e^x = e^y) \Leftrightarrow (x = y) \\ (e^x > e^y) \Leftrightarrow (x > y) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; e^x > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; (e^x)' = e^x$$

x	$-\infty$	$+\infty$
\exp'	+	
\exp		

نهايات مرجعية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

و بصفة عامة:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \end{cases}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}; \forall b \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} e^a \times e^b = e^{a+b} \\ \frac{1}{e^a} = e^{-a} \\ e^a = e^{a-b} \\ \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \\ (e^a)^r = e^{ra}, \forall r \in \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

*إذا كانت U دالة قابلة للإشتقاق على مجال I

فإن الدالة: $x \mapsto e^{U(x)}$ قابلة للإشتقاق على I

$$\boxed{(e^{U(x)})' = U'(x) e^{U(x)}}$$

و لكل x من I :

لكل عدد حقيقي a موجب قطعاً و يخالف 1، الدالة اللوغارتمية ذات الأساس a تقابل من \mathbb{R}_+^ نحو \mathbb{R} . و دالتها العكسية تسمى: الدالة الأسية ذات الأساس a .

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \mapsto a^x$$

و هي الدالة المعرفة كما يلي:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}; \forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\begin{cases} \text{Log}_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y \\ \text{Log}(a^x) = x \\ a^{\text{Log}_a(y)} = y \end{cases}$$

ولدينا:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \left\{ \begin{array}{l} a^x a^y = a^{x+y} \\ \frac{1}{a^x} = a^{-x} \\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \\ (a^x)^y = a^{xy} \end{array} \right.$$

و نقبل أن: $\forall x \in \mathbb{R}; 1^x = 1$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}; \forall x \in \mathbb{R}; a^x = e^{x \ln a}$$