الاشتـــقـــــــــــاق

I- اشتقاق مركب دالتين:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I مفتوح و g دالة للاشتقاق على f(I).

- لنبين أن gof قابلة للاشتقاق على I.

ليكن $x_0\in I$

لدينا:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{gof(x)-gof(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ولدينا f قابلة للاشتقاق في x_0 إذن $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

نضع $X=f(x)$ ، $X_0=f(x_0)$

لدينا $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ (لأن f قابلة للاشتقاق في x_0 بالتالي متصلة في x_0).

إذن $x\to x_0$ يعني $f(x)\to f(x_0)$ يعني $X\to X_0$

إذن :
$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\lim_{X\to X_0}\frac{g(X)-g(X_0)}{X\to X_0}=g'(X_0)$$

لأن g قابلة للاشتقاق في X_0 .

إذن :
$$\lim_{x\to x_0}\frac{gof(x)-gof(x_0)}{x-x_0}=g'(X_0).f'(x_0)$$
$$=g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

إذن gof قابلة للاشتقاق x_0 و : $(gof)'(x_0)=(g'of(x_0)).f'(x_0)$

بالتالي gof قابلة للاشتقاق على I : $(\forall x\in I)\ \ (gof)'(x)=(g'of(x)).f'(x)$

خاصية:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$
فإن gof قابلة للاشتقاق على I و $(\forall x\in I)\ \ (gof)'(x)=g'f(x).f'(x)$

مثال:

نعتبر الدالة $f(x)=\cos(x^3+x-1)$

لدينا : $f(x)=hog(x)$ حيث $g(x)=x^3+x-1$ و $h(x)=\cos x$

ولدينا h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $h'(x)=-\sin x$

و $g(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ إذن $f=hog$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$(\forall x\in\mathbb{R})\ \ f'(x)=(hog)'(x)=h'(g(x)).g'(x)$$
$$=h'(x^3+x-1)).(3x^2+1)$$
$$=-\sin(x^3+x-1)).(3x^2+1)$$

إذن: $f'(x)=-(3x^2+1).\sin(x^3+x-1)$

ملاحظة:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

فإن الدوال: $x\to\cos(u(x))$ ، $x\to\sin(u(x))$ ، $x\to tan(u(x))$

قابلة للاشتقاق على I و

$$(\forall\in I)\qquad (\cos(u(x))'=-u'(x).\sin(u(x))$$
$$(\sin(u(x))'=-u'(x).\cos(u(x))$$
$$(\tan(u(x))'=-u'(x)\left[1+\tan^2(u(x))\right]$$

II- اشتقاق الدالة العكسية و تطبيقاتها:

1- اشتقاق الدالة العكسية:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I

نعلم أن f تقابل من I نحو $J=f(I)$ و بالتالي تقبل دالة عكسية $f^{-1}: J \to I$

- نفترض أن f قابلة للاشتقاق على I.
- لندرس اشتقاق f^{-1} على J.

ليكن $y_0 \in J$ لنحسب $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$

نضع $\begin{cases} f^{-1}(y_0)=x_0 \\ f^{-1}(y)=x \end{cases}$ يعني $\begin{cases} f(x_0)=y_0 \\ f(x)=y \end{cases}$

ولدينا : $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)=x_0$ لأن f^{-1} متصلة.

إذن $y \to y_0$ يعني $f^{-1}(y) \to x_0$ يعني : $x \to x_0$

إذن: $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

ونعلم أن f قابلة للاشتقاق في x_0 إذن: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

إذا كانت $f'(x) \neq 0$ فإن : $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

إذن f^{-1} قابلة للاشتقاق في y_0 و : $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

إذن إذا كانت $f'(x) \neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ و $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

خاصية:

> إذا كانت f قابلة للاشتقاق و رتيبة قطعا على مجال I و $(\forall \in I) \ : f'(x) \neq 0$
>
> فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$ و $(\forall x \in I) \quad (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

2- تطبيقات:

a) اشتقاق دالة الجدر من الرتبة n : $(n \geq 2)$

نعتبر الدالة: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$x \to x^n$

نعلم أن f تقابل و $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$

*) لدينا : f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و $f'(x)=nx^{n-1}$ ولدينا : $x=0 \Leftrightarrow f'(x)$

*) لدينا f قابلة للاشتقاق و رتيبة قطعا على $]0,+\infty[$ و $f'(x) \neq 0 \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

إذن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$

و : $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{f'(\sqrt[n]{x})} = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$

إذن : $(\forall \in]0,+\infty[) \quad (\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$

يعني : $\left((x)^{\frac{1}{n}}\right)'=\dfrac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}}=\dfrac{1}{n(x)^{\frac{n-1}{n}}}=\dfrac{1}{n}.x^{\frac{1-n}{n}}$

يعني: $(x^{\frac{1}{n}})'=\dfrac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1}$

خاصية

> الدالة $x\rightarrow\sqrt[n]{x}$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و $(\sqrt[n]{x})'=\dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$ $(\forall\in\ ]0,+\infty[)$
>
> يعني: $(x^{\frac{1}{n}})'=\dfrac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1}$

ملاحظة :

* إذا كانت U قابلة للاشتقاق على I و $U(x)>0$: $(\forall\in\ ]0,+\infty[)$

فإن الدالة $x\rightarrow\sqrt[n]{u(x)}$ قابلةللإشتقاق على I و $(\sqrt[n]{U(x)})'=\dfrac{U'(x)}{n(\sqrt[n]{U(x)})^{n-1}}$ $(\forall\in I)$

يعني : $\left[(U(x)^{\frac{1}{n}}\right]=\dfrac{U'(x)}{n}.(U(x))^{\frac{1}{n}-1}$

حالة خاصة : $(\sqrt{U(x)})'=\dfrac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$ و $(\sqrt[3]{U(x)})'=\dfrac{U'(x)}{3(\sqrt[3]{U(x)})^{2}}$

b) اشتقاق الدالة $x\rightarrow x^r$ مع $r\in\mathbb{Q}$:

باستعمال اشتقاق مركب دالتين نبين ما يالي:

خاصية :

> ليكن $r\in\mathbb{Q}$. الدالة $x\rightarrow x^r$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$
>
> و $(x^r)'=rx^{r-1}$ $(\forall\in\ ]0,+\infty[)$

ملاحظة:

إذا كانت U قابلة للاشتقاق على I و $u(x)>0$ $(\forall\in I):$

فإن الدالة $x\rightarrow(U(x))^r$ قابلة للاشتقاق على I و $(U(x)^r)'=r(U(x)')(U(x))^{r-1}$ $(\forall\in I):$

c) اشتقاق الدالة $Arcsin$ ، $Arccos$ ، $Arctan$:

نعتبر الدالة: $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\rightarrow[-1,1]$

$x\rightarrow\sin x$

نعلم أن $f^{-1}(x)=Arc\sin x$

لدينا f قابلة للاشتقاق على $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ و $f'(x)=\cos x$

ولدينا : $x=\dfrac{\pi}{2}$ أو $x=\dfrac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ $f'(x)=0$

– لدينا f قابلة للاشتقاق و رتيبة قطعا على $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

إذن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f\left(\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=]-1,1[$ و

$(\forall x\in\ ]-1,1[)\quad (f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$$=\frac{1}{\cos(Arc\sin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

إذن $(\forall x\in]-1,1[)\quad (Arc\sin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

– بنفس الطريقة ندرس اشتقاق $Arc\cos$ و $Arc\tan$.

خاصية:

1– الدالتان : $x\to Arc\sin x$ و $x\to Arc\cos x$ قابلتان للاشتقاق على $]-1,1[$

و $(Arc\cos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$ و $(\forall x\in]-1,1[)\quad (Arc\sin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2– الدالة $Arc\tan$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ $\quad (\forall x\in \mathbb{R})\quad (Arc\tan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

ملاحظة:

1– إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $(\forall \in I)\quad -1<U(x)<1$

فإن الدالتين $x\to Arc\sin(U(x))$ و $x\to Arc\cos(U(x))$

قابلتين للاشتقاق على I و: $(\forall \in I)\quad :\quad [Arc\sin(U(x)]'=\dfrac{U'(x)}{\sqrt{1-(U(x)^2}}$

و $[Arc\cos(U(x)]'=\dfrac{-U'(x)}{\sqrt{1-(U(x)^2}}$

2– إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و: $(\forall \in I)\quad :\quad [Arc\tan(U(x)]'=\dfrac{U'(x)}{1+U(x)^2}$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1:

نعتبر الدالة : $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-x$

* ادرس اشتقاق f و احسب $f'(x)$:

لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و

$$f'(x)=\frac{((x+1)^2)'}{3(\sqrt[3]{(x+1)^2})^2}-1$$

$$=\frac{2(x+1)'(x+1)}{3(\sqrt[3]{(x+1)^2})^2}-1$$

إذن $f'(x)=\dfrac{2(x+1)}{3(\sqrt[3]{(x+1)^2})^2}-1$

طريقة أخرى:

لدينا : $f(x)=|x+1|^{\frac{2}{3}}-x$

* إذا كان $x>-1$ فإن: $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}-x$

إذن $f'(x)=\dfrac{2}{3}(x+1)'(x+1)^{\frac{2}{3}-1}-1$

$$=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}}-1$$

إذن $f'(x)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}-1$

* إذا كان $x<-1$ فإن : $f(x)=(-x-1)^{\frac{2}{3}}-x$

إذن :
$$f'(x)=\frac{2}{3}(-x-1)'(-x-1)^{\frac{-1}{3}}-1$$
$$f'(x)=\frac{-2}{3\sqrt[3]{-x-1}}-1$$

لندرس الاشتقاق في -1 :

لدينا
$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-x-1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x+1}-1$$

		1	
x+1	−	0	+

لدينا:
$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^3}}-1$$
$$=\lim_{x\to-1^+}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3}}-1$$
$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}-1=-\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يمين -1. و $\mathcal{E}_f$ يقبل نصف مما في موازي لمحور الأراتيب موجه نحو الأعلى على يمين النقطة $A(-1,1)$

– ولدينا :
$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x+1}-1$$
$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{-\sqrt[3]{-(x+1)^3}}-1$$
$$=\lim_{x\to-1^-}-\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{-(x+1)^3}}-1$$
$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{-1}{\sqrt[3]{-(x+1)}}-1=-\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يسار -1 و $\mathcal{E}_f$ يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب موجه نحو الأعلى على يسار $A(-1,1)$.

تمرين 2 أدرس اشتقاق الدوال arccos و arcsin على يمين -1 و عللى يسار 1 .

تمرين 3

احسب النهايات التالية:

(1
$$\boxed{l=\lim_{x\to1}\frac{Arc\cos(\frac{1}{1+x^2})-\frac{\pi}{3}}{x-1}}$$

$$l=\lim_{x\to1}\frac{Arc\cos(\frac{1}{1+x^2})-Arc\cos(\frac{1}{2})}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{Arc\cos(\frac{1}{1+x^2})-Arc\cos(\frac{1}{2})}{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}}{x-1}$$

– لدينا

$$\lim_{x\to 1}\frac{Arc\cos(\frac{1}{1+x^2})-Arc\cos(\frac{1}{2})}{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{Arc\cos(t)-Arc\cos(\frac{1}{2})}{t-\frac{1}{2}}=(Arc\cos t)'_{t=\frac{1}{2}}$$

$$=(\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}})_{t=\frac{1}{2}}=\frac{-2}{\sqrt{3}}$$

– ولدينا:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2-(1+x^2)}{2(1+x^2)}.\frac{1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{2(1+x^2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1+x)}{2(1+x^2)}=\frac{-1}{2}$$

إذن: $l=\frac{-2}{\sqrt{3}}.\frac{-1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2 $\boxed{l=\lim_{x\to 0^+}\frac{Arc\sin(\frac{1}{x^4+x+1})-\frac{\pi}{2}}{x}}$

$$l=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arcsin(\frac{1}{x^4+x+1})-A\,\mathrm{rcsin}(1)}{\frac{1}{x^4+x+1}-1}.\frac{\frac{1}{x^4+x+1}-1}{x}$$

ولدينا: $l_1=\lim_{x\to 0^+}\frac{Arcsin(\frac{1}{x^4+x+1})-Arcsin\,1}{\frac{1}{x^4+x+1}-1}$

$$=\lim_{t\to 1^-}\frac{Arcsin(t)-Arcsin\,1}{t-1}=\lim_{t\to 1^-}\frac{Arcsin\,t-\frac{\pi}{2}}{t-1}$$

نضع : $X=Arcsin\,t-\frac{\pi}{2}$

*) لدينا $-\frac{\pi}{2}\le Arcsin\,t\le\frac{\pi}{2}$ يعني : $-\pi\le Arcsin\,t-\frac{\pi}{2}\le 0$ يعني : $-\pi\le X\le 0$

*) $t\to 1^-\Leftrightarrow X\to 0^-$

*) لدينا : $X=Arcsin\,t-\frac{\pi}{2}$ يعني : $Arcsin\,t=X+\frac{\pi}{2}$ يعني : $t=\sin(X+\frac{\pi}{2})$

يعني : $t=\cos X$

إذن

$$\lim_{t\to 1^-}\frac{Arcsin\,t-\frac{\pi}{2}}{t-1}=\lim_{X\to 0^-}\frac{X}{\cos X-1}$$

$$=\lim_{X\to 0^-}\frac{-X}{\frac{1-\cos X}{X^2}.X^2}=\lim_{X\to 0^-}\frac{-1}{\frac{1-\cos X}{X^2}.X}=+\infty$$

إذن : $l_1=+\infty$

– ولدينا : $l_2=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^4+x+1}-1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-(x^4+x+1)}{(x^4+x+1).x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^4-x}{x(x^4+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3-1}{x^4+x+1} = -1$$

إذن : $l_2 = -1$

ومنه: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

(3 $\boxed{l = \lim_{x\to 0} \frac{Arc\sin(x^2-1)+\frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} f(x)}$

طريقة 1 :

-نضع $t = Arc\sin(x^2-1)+\frac{\pi}{2}$

*) لدينا : $-\frac{\pi}{2} \le Arc\sin(x^2-1) \le \frac{\pi}{2}$ يعني : $0 \le Arc\sin(x^2-1)+\frac{\pi}{2} \le \pi$

يعني : $0 \le t \le \pi$

*) لدينا : $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0^+$

*) لدينا : $t-\frac{\pi}{2} = Arc\sin(x^2-1)$ يعني : $\sin(t-\frac{\pi}{2}) = x^2-1$

يعني : $-\sin(\frac{\pi}{2}-t) = x^2-1$ يعني : $-\cos(t) = x^2-1$

يعني : $x^2 = 1-\cos(t)$

يعني : $\begin{cases} x = \sqrt{1-\cos t} \\ x = -\sqrt{1-\cos t} \end{cases}$ أو

- إذا كان $x \to 0^+$ فإن $x = \sqrt{1-\cos t}$

و إذا كان $x \to 0^-$ فإن $x = -\sqrt{1-\cos t}$

إذن :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}.t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}.t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{\frac{1-\cos t}{t^2}}} = -\sqrt{2}$$

طريقة 2:

- نضع : $g(x) = Arc\sin(x^2-1)+\frac{\pi}{2}$

$Dg = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

لنبسط $g(x)$:

- لدينا : $x^2-1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$

ولدينا :

$$x^2-1 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

إذن g قابلة للاشتقاق على $\left]-\sqrt{2},0\right[\cup \left]0,\sqrt{2}\right[$

و $$g'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}=\frac{2x}{\sqrt{-x^4+2x^2}}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{2x^2(1-\frac{x^2}{2})}}=\frac{2x}{\sqrt{2}|x|\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}=2\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x}{|x|\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}$$

+ إذا كان $x\in\left]0,\sqrt{2}\right[$ فإن :

$$g'(x)=2\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}=2\frac{(\frac{x}{\sqrt{2}})'}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}$$

$$=(2Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}}))'$$

إذن : $$g(x)=2Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})+\lambda$$

و من أجل $x=1$ لدينا : $$g(1)=2Arc\sin(\frac{1}{\sqrt{2}})+\lambda$$

يعني : $$\frac{\pi}{2}=2\frac{\pi}{4}+\lambda$$

يعني : $$\lambda=0$$

إذن : $$g(x)=2Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

* إذا كان $x\in\left]-\sqrt{2},0\right[$ فإن :

$$g'(x)=-2\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}=(-2Arc\sin\frac{x}{\sqrt{2}})'$$

إذن $$g(x)=-2Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})+\lambda'$$

و من أجل $x=-1$

لدينا : $$g(-1)=-2Arc\sin(\frac{-1}{\sqrt{2}})+\lambda'$$

يعني : $$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\lambda'$$
$$\lambda'=0$$

إذن : $$g(x)=-2Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

وبالتالي : $$g(x)=\begin{cases}2Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}});\ x\in\left[0,\sqrt{2}\right[\\ -2Arc\sin(\frac{x}{\sqrt{2}});\ x\in\left[-\sqrt{2},0\right[\end{cases}$$

إذن : $$l=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$$

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2Arc\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2Arc\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}}}.\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2}\frac{Arc\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\sqrt{2}\frac{Arc\sin t}{t}=\lim_{t\to 0^+}\sqrt{2}\frac{Arc\sin t-Arc\sin 0}{t-0}$$

$$=\sqrt{2}\,(Arc\sin t)'_{t=0}=\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}})_{t=0}=\sqrt{2}$$

- و لدينا :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2Arc\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2Arc\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}}}.\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{2}\frac{Arc\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

$$=\lim_{t\to 0^-}-\sqrt{2}\frac{Arc\sin t}{t}$$

$$=-\sqrt{2}(Arc\sin t)'_{t=0}=-\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}})=-\sqrt{2}$$

(4 $$\boxed{I=\lim_{+\infty}x\,(Arc\tan(\frac{x+1}{x})-\frac{\pi}{4})}$$

$$I=\lim_{+\infty}x\,(Arc\tan(\frac{x+1}{x})-Arc\tan 1)$$

$$=\lim_{+\infty}x(\frac{Arc\tan(\frac{x+1}{x})-Arc\tan 1}{\frac{1+x}{x}-1})(\frac{1+x}{x}-1)$$

$$=\lim_{+\infty}(\frac{Arc\tan(\frac{x+1}{x})-Arc\tan 1}{\frac{1+x}{x}-1})=\lim_{t\to 1}(\frac{Arc\tan(t)-Arc\tan 1}{t-1})=(Arc\tan t)'_{t=1}$$

$$=\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{2}$$

(5 $$\boxed{I=\lim_{-\infty}x\,(Arc\tan(\frac{x^2+1}{x})+\frac{\pi}{2})}$$

لدينا : $\frac{x^2+1}{x}<0$ بجوار $-\infty$

إذن $Arc\tan(\frac{x^2+1}{x})+Arc\tan(\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}})=-\frac{\pi}{2}$

يعني $Arc\tan(\frac{x^2+1}{x})+\frac{\pi}{2}=-Arc\tan(\frac{x}{x^2+1})$

إذن :
$$l=\lim_{-\infty} x\,(Arc\tan(\frac{x^2+1}{x})+\frac{\pi}{2})$$
$$=\lim_{-\infty} x(-Arc\tan(\frac{x}{x^2+1}))$$
$$=\lim_{-\infty}-x(Arc\tan(\frac{x}{x^2+1})-Arc\tan 0)$$
$$=\lim_{-\infty}-x(\frac{Arc\tan(\frac{x}{x^2+1})-Arc\tan 0}{\frac{x}{x^2+1}}).\frac{x}{x^2+1}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{(\frac{Arc\tan(\frac{x}{x^2+1})-Arc\tan 0}{\frac{x}{x^2+1}-0})}_{l_1}.\underbrace{\frac{-x^2}{x^2+1}}_{l_2}$$

و لدينا :
$$l_1=\lim_{t\to 0}\frac{Arc\tan t-Arc\tan 0}{t-0}$$
$$=(Arc\tan t)'_{t=0}=\frac{1}{1+t^2}=1$$
$$l_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

إذن : $l=-1$

ملاحظة :

*) من اجل حساب $l=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\sin U(x)-Arc\sin\alpha}{x-x_0}$

– إذا كان $\boxed{\lim_{x\to x_0}U(x)\neq\pm1}$ يعني: $\alpha\neq\pm1$

لدينا: $l=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\sin U(x)-Arc\sin\alpha}{U(x)-\alpha}.\frac{U(x)-\alpha}{x-x_0}$

– إذا كان $\boxed{\lim_{x\to x_0}U(x)\neq\pm1}$ يعني: $\alpha\neq\pm1$ نقوم بحساب $U'(x)$

+ إذا كان $\boxed{\lim_{x\to x_0}U'(x)\neq 0}$: $l=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\sin U(x)-Arc\sin\alpha}{U(x)-\alpha}.\frac{U(x)-\alpha}{x-x_0}$

+ إذا كان $\boxed{\lim_{x\to x_0}U'(x)=0}$: . نستعمل تغيير المتغير بوضع $t=Arc\sin U(x)-Arc\sin\alpha$

إذا كان حساب x بدلالة t سهلا.

. أو تبسيط الدالة $g(x)=Arc\sin U(x)-Arc\sin\alpha$

*) بنفس الطريقة نحسب :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\sin U(x)-Arc\sin\alpha}{x-x_0}$$

*) حساب : $l=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\tan U(x)-\alpha}{x-x_0}$

– إذا كان $\lim_{x\to x_0}U(x)\neq\pm\infty$ يعني : $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$

$$l=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\tan U(x)-Arc\tan\beta}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\tan U(x)-Arc\tan\beta}{U(x)-\beta}.\frac{U(x)-\beta}{x-x_0}$$

– إذا كان $\lim_{x\to x_0}U(x)=\pm\infty$ يعني : $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$ نستعمل الصيغة :

$$Arc\tan(\frac{1}{U(x)})+Arc\tan U(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2},\lim U(x)=-\infty\\ \frac{\pi}{2},\lim U(x)=+\infty\end{cases}$$

ونصبح في الحالة السابقة.

تمرين:

*) $\boxed{\lim_{x\to 1^-}\frac{2xArc\sin x-\pi}{x-1}}$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2xArc\sin x-\pi}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2xArc\sin x-\pi x+\pi x-\pi}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}2x(\frac{Arc\sin x-\frac{\pi}{2}}{x-1})+\pi\frac{x-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}2x\frac{Arc\sin x-\frac{\pi}{2}}{x-1}+\pi=+\infty$$

III– الدوال الأصلية :

1) تعريف :

لتكن f دالة معرفة على المجال I.
نقول إن الدالة F دالة أصلية لـ f على المجال I، إذا و فقط كانت F قابلة للاشتقاق على I و $F'(x)=f(x)\quad(\forall x\in I)$

مثال :

نعتبر الدالة : $f(x)=x^3+\frac{1}{x^2+1}+\sin x$

الدالة : $F(x)=\frac{1}{4}x^4+Arc\tan x-\cos x$ دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

وكل دالة على شكل : $F(x)=\frac{1}{4}x^4+Arc\tan x-\cos x+\lambda$ هي كذلك دالة أصلية لـ f عل $\mathbb{R}$.

2) خاصيات:

1– لتكن f دالة تقبل دالة أصلية F على مجال I.
*) نعتبر الدالة : $G=F+\lambda$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$
لدينا: $G'=(F+\lambda)'$
$=F'(x)=f(x)$

إذن G دالة أصلية ل f .

*) لتكن G دالة أصلية ل f .

لدينا : $(G-F)' = G' - F'$

$= f - f = 0$

إذن يوجد λ بحيث: $G(x) - F(x) = \lambda$

يعني : $G(x) = F(x) + \lambda$

خاصية 1:

إذا كانت f دالة تقبل دالة أصلية F على مجال I فإن الدوال الأصلية ل f هي الدوال التي تكتب على شكل $G = F + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

مثال:

حدد الدوال الأصلية للدوال: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

لدينا : $f(x) = \dfrac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$

إذن الدوال أصلية لـــ f هي الدوال : $G(x) = x + Arc\tan x + \lambda$

2- لتكن f دالة تقبل دالة أصلية F على I .

ليكن $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$

– لنبحث عن الدوال أصلية G التي تحقق $G(x_0) = y_0$ لدينا : $G(x) = F(x) + \lambda$

ولدينا : $G(x_0) = y_0$ يعني : $F(x_0) + \lambda = y_0$

يعني : $\lambda = y_0 - F(x_0)$

إذن $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$

ومنه توجد دالة أصلية وحيدة تحقق $G(x_0) = +y_0$

خاصية 2:

إذا كانت f دالة تقبل دالة أصلية على مجال I و $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$ ، فإنه توجد دالة أصلية وحيدة G تحقق $G(x_0) = +y_0$.

مثال:

نعتبر الدالة: $f(x) = x\sqrt[3]{x+1}$

حد الدالة الأصلية F ل f على $]-1,+\infty[$ بحيث $F(0) = 1$

لدينا : $f(x) = x\sqrt[3]{x+1} = x(x+1)^{\frac{1}{3}}$

$$= (x+1-1)(x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (x+1)(x+1)^{\frac{1}{3}} - (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (x+1)^{\frac{4}{3}} - (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (x+1)'(x+1)^{\frac{4}{3}} - (x+1)'(x+1)^{\frac{1}{3}}$$

إذن $F(x) = \dfrac{1}{\frac{4}{3}+1}(x+1)^{\frac{4}{3}+1} - \dfrac{1}{\frac{1}{3}+1}(x+1)^{\frac{1}{3}+1} + \lambda$

$$= \frac{3}{7}(x+1)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \lambda$$

$$= \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+1)^7} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} + \lambda$$

ولدينا : $F(0) = 1$

يعني : $\frac{3}{7} - \frac{3}{4} + \lambda = 1$

يعني : $\lambda = \frac{4}{7} + \frac{3}{4} = \frac{37}{28}$

وبالتالي : $F(x) = \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+1)^7} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} + \frac{37}{28}$

خاصية 3 :

لتكن F و G دالتان أصليتان ل f و g على التوالي على I .
* الدالة $F+G$ هي دالة أصلية ل $f+g$.
* الدالة αF دالة أصلية ل αf.

خاصية 4 : (مقبولة)

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I فإن الدالة f تقبل دالة أصلية.

3) جدول الدوال الأصلية الاعتيادية:

الدالة f	الدوال الأصلية F
$a \in \mathbb{R}$	$ax + \lambda$
$x^r \quad (r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + \lambda$
$f' f^r \quad (r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\frac{1}{r+1} f^{r+1} + \lambda$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + \lambda$
$\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$	$2\sqrt{U(x)} + \lambda$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + \lambda$
$\frac{f'}{f}$	$-\frac{1}{f} + \lambda$
$\frac{1}{1+x^2}$	$Arc\tan(x) + \lambda$
$\frac{U'(x)}{1+U^2(x)}$	$Arc\tan(U(x)) + \lambda$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arc\sin x + \lambda$
$\frac{U'(x)}{\sqrt{1-U^2(x)}}$	$Arc\sin U(x) + \lambda$
$\cos x$	$\sin x + \lambda$
$U'(x) \cos U(x)$	$\sin U(x) + \lambda$
$\sin x$	$-\cos x + \lambda$
$U'(x) \sin U(x)$	$-\cos U(x) + \lambda$

$1+\tan^2 x$	$\tan x+\lambda$
$U'(x)(1+\tan^2 U(x))$	$\tan U(x)+\lambda$
$f'g+fg'$	$fg+\lambda$
$\dfrac{f'g+fg'}{g^2}$	$\dfrac{f}{g}+\lambda$

مثال:

حدد الدوال الأصلية لـــ : $f(x)=\cos x-x\sin x$

$=(x)'\cos x+x(\cos x)'$

إذن الدوال الأصلية ل f هي : $F(x)=x\cos x+\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

IV- مبرهنة رول – ROLL – مبرهنة التزايدات المنتهية.

1) مبرهنة رول:

إذا كانت f دالة تحقق ما يلي:

*) f متصلة على $[a,b]$

*) f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$

*) $f(a)=f(b)$

فإنه يوجد $c\in\,]a,b[$

برهان:

+) إذا كانت f ثابتة على $[a,b]$ فإن $f'(x)=0 \quad (\forall x\in\,]a,b[)$

إذن يوجد c من $]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$.

+) إذا كانت f غير ثابتة.

فإنه يوجد x_0 من $]a,b[$ بحيث $f(x_0)\neq f(a)$ و $f(x_0)\neq f(b)$

– إذا كان : $f(x_0)>f(a)$:

لدينا f متصلة على $[a,b]$ إذن f تقبل قيمة قصوية M عند c من $[a,b]$.

و لدينا : $f(c)=M>f(x_0)>f(a)$ إذن $f(c)\neq f(a)$ و $f(c)\neq f(b)$

إذن $c\neq a$ و $c\neq b$

ومنه $c\in\,]a,b[$

لدينا f قابلة للاشتقاق في c و تقبل قيمة قصوية عند c إذن $f'(c)=0$.

ومنه يوجد $c\in\,]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$.

– إذا كان $f(x_0)<f(a)$ نفس الطريقة باستعمال القيمة الدنوية.

ملاحظة:

*) العدد c ليس وحيدا.

*) مبرهنة رول يعني هندسيا أنه توجد نقطة أفصولها c حيث يكون المماس موازيا لمحور الأفاصيل.

2) مبرهنة التزايدات المنتهية:

مبرهنة:

إذا كانت f دالة تحقق ما يالي:

*) f متصلة على $[a,b]$

*) f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$

فإنه يوجد $c\in\,]a,b[$ بحيث $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

يعني : $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

برهان :

نعتبر الدالة : $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

*) لدينا φ متصلة على $[a,b]$

*) φ قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ و $(\forall x \in]a,b[) \quad \varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

*) لدينا $\varphi(b) = \varphi(a) = f(a)$

إذن حسب رول يوجد $c \in]a,b[$ بحيث : $\varphi'(c) = 0$

يعني : $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

يعني : $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ملاحظة :

*) العدد c ليس وحيدا.

*) نعتبر النقطتين $A(a, f(a))$ ، $B(b, f(b))$

لدينا $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ هو المعامل الموجه للمستقيم (AB) .

و لدينا $f'(c)$ هو المعامل الموجه للمماس في $M(c, f(c))$

إذن مبرهنة التزايدات المنتهية تعني هندسيا أنه توجد نقطة أفصولها c حيث يكون المماس موازيا (AB) .

– مبرهنة رول هي حالة خاصة لمبرهنة التزايدات المنتهية.

تمرين

بين ما يالي:

*) $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

*) $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad \dfrac{x}{x^2 + 1} \leq Arc\tan x \leq x$

*) $(\forall x \in [0,1[) \quad x \leq \arcsin x \leq \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

*) ليكن x و y من $\mathbb{R}$. لنبين أن $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

نعتبر الدالة $f(t) = \sin t$

– لدينا f متصلة على المجال الذي محاذاته x و y .

– قابلة للاشتقاق على هذا المجال مفتوح.

وحسب مبرهنة المتزايدات المنتهية يوجد c محصور بين x و y بحيث: $f(x) - f(y) = (x - y) f'(c)$

يعني: $\sin x - \sin y = (x - y)\cos c$

يعني : $|\sin x - \sin y| = (x - y)|\cos c|$

و لدينا: $|\cos c| \leq 1$ إذن : $|x - y||\cos c| \leq |x - y|$

يعني : $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

*) ليكن $x \in \mathbb{R}^+$ لنبين أن $\dfrac{1}{1 + x^2} \leq Arc\tan x \leq x$

نعتبر الدالة $f(t) = Arc\tan t$

– لدينا f متصلة على $[0, x]$.

– f قابلة للاشتقاق على $]0, x[$ و $f'(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد $c \in]0, x[$ بحيث $f(x) - f(o) = (x - 0) f'(c)$

يعني : $Arc\tan x = x.\frac{1}{1+c^2}$

و لدينا : $0 < c < x$

يعني : $0 < c^2 < x^2$

يعني : $1 < 1+c^2 < 1+x^2$

يعني : $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$

إذن : $\frac{x}{1+x^2} \le \frac{x}{1+c^2} \le x$

يعني : $\frac{x}{1+x^2} \le \text{Arctan}\, x \le x$

إذن : $\frac{x}{1+x^2} \le \text{Arctan}\, x \le x \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*)$

3) تطبيقات :

خاصية1:

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $f'(x) = 0 \quad (\forall x \in I)$ فإن f ثابتة على I.

برهان :

ليكن x_1 و x من I بحيث $x_2 \neq x_1$

نفترض مثلا $x_1 < x_2$

- لدينا f متصلة على $[x_1, x_2]$ (لأن $[x_1, x_2] \subset I$)
- لدينا f قابلة للاشتقاق على $]x_1, x_2[$ ($]x_1, x_2[\subset I$)

إذن حسب TAF يوجد $c \in]x_1, x_2[$ بحيث $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(c)$

و لدينا $f'(c) = 0$ إذن $f(x_1) - f(x_2) = 0$

يعني $f(x_1) = f(x_2)$

ومنه f ثابتة على I.

ملاحظة :

1) هذه الخاصة غير صحيحة إذا كان I ليس مجالا.

2) إذا كانت f , g دالتية قابلتين للاشتقاق على مجال بحيث $f'(x) = g'(x) \quad (\forall x \in I)$.

فإنه يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث : $f(x) = g(x) + \lambda \quad (\forall x \in I)$

تمرين تطبيقي:

بين أن : $\frac{\pi}{2} - 2Arc\tan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = Arc\sin x \quad (\forall x \in]-1, 1[)$

- نضع $f(x) = Arc\sin x - \frac{\pi}{2} + 2Arc\tan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

لنبين أن $f(x) = 0$

لدينا : f قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$.

و $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\frac{\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'}{1+\frac{1-x}{1+x}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right)}{\frac{2}{1+x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2}{(1+x)^2\left(2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)}(1+x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1+x)\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2\frac{(1-x)}{1+x}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

إذن : $f'(x) = 0 \qquad (\forall x \in]-1,1[)$

يعني f ثابتة.

ولدينا : $f(0) = 0 - \frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{4} = 0$

إذن $(\forall x \in]-1,1[) \quad f(x) = 0$

يعني : $(\forall x \in]-1,1[) \quad \frac{\pi}{2} - 2Arc\tan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = Arc\sin x$

خاصية 2:

إذا كانت f , g دالتان تحققان مايالي:

* f , g متصلتان على $]a,+\infty[$
* f , g قابلتان للاشتقاق على $]a,+\infty[$ و $(\forall x \in]a,+\infty[) \quad f'(x) \geq g'(x)$
* $f(a) = g(a)$

فإن : $f(x) \geq g(x) \qquad (\forall x \in]a,+\infty[)$