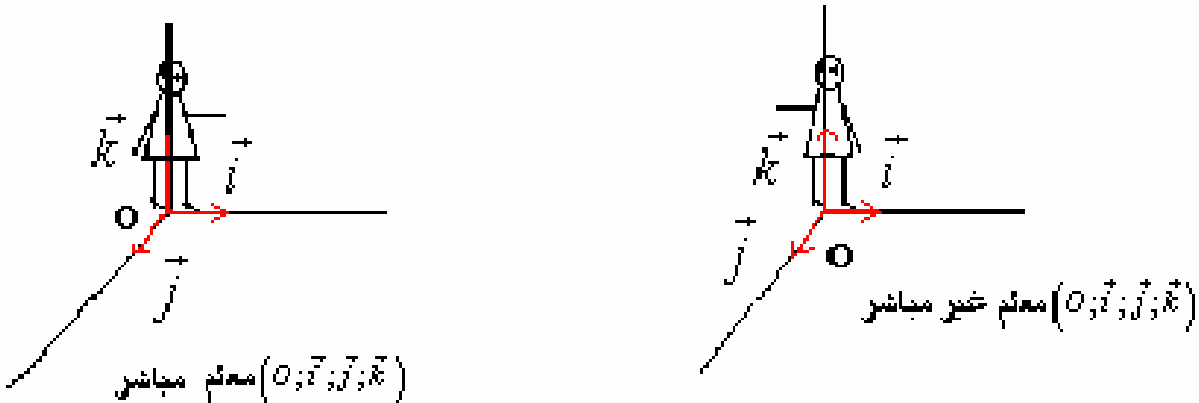


**I- توجيه الفضاء**  
**1- معلم موجه في الفضاء**

نسب الفضاء E إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$   
لتكن I و J و K ثلاث نقط حيث  $\vec{OI} = \vec{i}$   $\vec{OJ} = \vec{j}$   $\vec{OK} = \vec{k}$   
« رجل أمبير » للمعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  هو رجل خيالي رأسه في النقطة K قدماه على النقطة O و ينظر إلى I  
النقطة J إما توجد على يمين « رجل أمبير » أو على يساره .

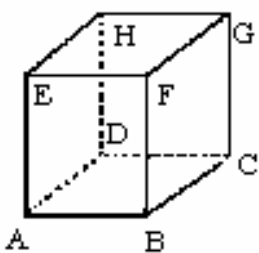


**تعريف :**

الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  . لتكن I و J و K ثلاث نقط حيث  $\vec{OI} = \vec{i}$   $\vec{OJ} = \vec{j}$   $\vec{OK} = \vec{k}$   
نقول إن : \*  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم مباشر إذا وجدت J على يسار « رجل أمبير »  
\*  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم غير مباشر إذا وجدت J على يمين « رجل أمبير »

**أمثلة :**

\* نعتبر  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم مباشر  
 $(O; \vec{j}; \vec{i}; \vec{k})$  معلم غير مباشر  
 $(O; \vec{j}; \vec{k}; \vec{i})$  معلم مباشر



\*\* ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1  
معلمان مباشران  $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$  ;  $(B; \vec{BC}; \vec{BA}; \vec{BF})$   
معلمان غير مباشرين  $(A; \vec{AD}; \vec{AB}; \vec{AE})$  ,  $(E; \vec{EA}; \vec{EF}; \vec{EH})$

**2- الأسرة المباشرة**

يمكننا توجيه الفضاء  $V_3$  , اذا وجهنا جميع أساساته

**تعريف**

نقول إن الأساس المتعامد الممنظم  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  مباشر اذا كان  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  م.م.م. مباشر مهما كانت النقطة O من الفضاء

**3- توجيه المستوي**

ليكن (P) مستوى في الفضاء و  $\vec{k}$  متجهة واحدة و منتظمة على (P) , و O نقطة من المستوى (P)  
 $(O; \vec{i}; \vec{j})$  م.م.م للمستوي (P)

لدينا  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ممنظم للفضاء E

يكون المعلم المتعامد الممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  في المستوى (P) معلما مباشرا اذا كان المعلم المتعامد

الممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  مباشرا

- \* يتم توجيه مستوى (P) بتوجيه متجهة منتظمة عليه.
- \* كل المستويات الموازية لـ (P) له نفس توجيه المستوى (P)

## II - الجداء المتجهي

### 1- تعريف

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء  $V_3$  و A و B نقطتين من الفضاء E بحيث  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$   $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$   
الجداء المتجهي للمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  في هذا الترتيب، هو المتجهة التي لها بـ  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  المعرفة كما يلي :

- \* إذا كانتا  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين فان  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .
- \* إذا كانتا  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين فان  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  هي المتجهة التي تحقق :
  - $\vec{u} \wedge \vec{v}$  عمودي على كل من  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$
  - $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$  أساس مباشر.

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta \quad \text{حيث } \theta \text{ قياس الزاوية } [\widehat{AOB}]$$

**أمثلة** \* نعتبر  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

\* إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين واحدتين و متعامدتين فان  $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$  أساس مباشر.

$$\|\vec{u}\| = 5 \quad \|\vec{v}\| = 2 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -5 \quad (\vec{u}; \vec{v}) = \theta \quad \theta \in ]0; \pi[ \quad \text{نحسب } \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \text{ علما أن } \theta \in ]0; \pi[$$

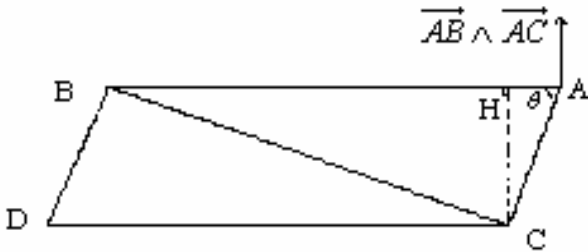
تمرين

### 2- خاصيات

#### أ- خاصية

إذا كانت B و A و C ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء فان المتجهة  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  منتظمة على المستوى (ABC).

لتكن B و A و C ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء  $\theta$  قياس الزاوية  $[\widehat{CAB}]$  , H المسقط العمودي لـ C على (AB)



$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC \cdot \sin \theta \quad HC = AC \sin \theta$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \times HC$$

#### خاصية

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ مساحة المثلث ABC هو نصف}$$

#### نتيجة

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ مساحة متوازي الأضلاع ABDC هي}$$

#### د- خاصية

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء  
يكون  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  منعدما إذا و فقط كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين  
**البرهان** \*  $\Rightarrow$  (بديهية - التعريف)  $\leftarrow$  \*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

$$\Rightarrow \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \quad \vee \quad \|\vec{v}\| = 0 \quad \vee \quad \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont liés}$$

**ملاحظة**  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow$  A و B و C مستقيمية  
**ج- الجداء المتجهي والعمليات (نقل)**

$$\forall (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in V_3^3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$$

$$(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$$

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$$

**تمرين**

معلم متعامد ممنظم مباشر  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

أحسب  $(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \wedge \vec{k}$      $(\vec{i} + 2\vec{k}) \wedge \vec{j}$      $\vec{i} \wedge 3\vec{j}$      $(2\vec{i} - \vec{j}) \wedge (3\vec{i} + 4\vec{j})$

**تمرين**

لتكن  $\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{d}$  ;  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{d}$

بين إن  $\vec{a} - \vec{d}$  و  $\vec{b} - \vec{c}$  مسنقيمتان

**3- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في م.م.م مباشر.**

معلم متعامد ممنظم مباشر  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$\vec{u}(x; y; z) \quad \vec{v}(x'; y'; z')$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$= (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

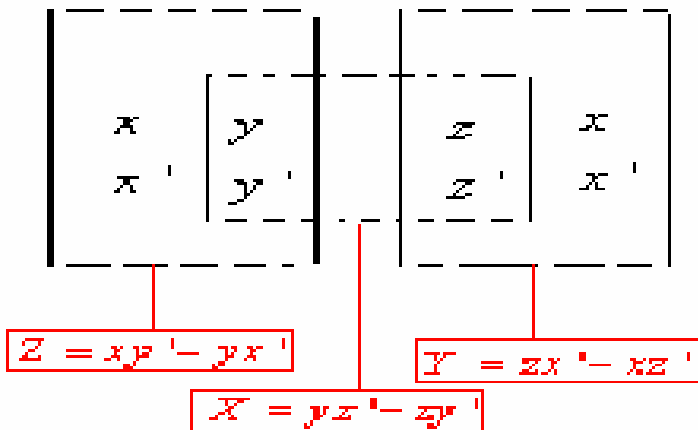
**خاصية**

الفضاء E منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  و  $\vec{u}(x; y; z)$  و  $\vec{v}(x'; y'; z')$  متجهتان من  $V_3$

إحداثيات الجداء المتجهي  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  بالنسبة للأساس  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  هو  $(X; Y; Z)$  حيث

$$X = yz' - zy' \quad Y = zx' - xz' \quad Z = xy' - yx'$$

**ملاحظة** يمكن استعمال الوضعية التالية



**مثال** نعتبر  $\vec{v}(-2; -1; 1)$   $\vec{u}(1; 2; 0)$   $A(1; 2; 1)$   $B(0; -3; 2)$   $C(1; 2; 1)$

أحسب مساحة المثلث (ABC)

حدد  $\vec{u} \wedge \vec{v}$

**III - تطبيقات الجداء المتجهي**

### 1- معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمة

#### خاصية

لتكن  $B$  و  $A$  و  $C$  ثلاث نقط غير مستقيمة من فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر  

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \cdot \overline{AM}$$

**مثال** نعتبر  $A(1;2;3)$  و  $B(1;-1;1)$  و  $C(2;1;2)$  حدد معادلة المستوى  $(ABC)$

#### 2- تقاطع مستويين

نعتبر في فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$(P) : ax+by+cz+d=0$$

$$(P') : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

لدينا  $\vec{n}(a;b;c)$  منظمية لـ  $(P)$  و  $\vec{n}'(a';b';c')$  منظمية لـ  $(P')$

\* اذا كان  $(P)$  و  $(P')$  متقاطعين فان المستقيم  $(D)$  تقاطع  $(P)$  و  $(P')$  موجه بـ  $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

\* اذا كان  $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq 0$  فان  $(P)$  و  $(P')$  متقاطعان وفق مستقيم موجه بـ  $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

#### تمرين

حدد تقاطع  $(P) : x+2y-2z+3=0$  و  $(P') : 4x-4y+2z-5=0$

### 3- مسافة نقطة عن مستقيم

في الفضاء  $(D)$  مستقيم مار من  $A$  و موجه بـ  $\vec{u}$  ,  $M$  نقطة من الفضاء و  $H$  مسقطها العمودي على  $(D)$

$$\overline{AM} \wedge \vec{u} = (\overline{AH} + \overline{HM}) \wedge \vec{u} = \overline{HM} \wedge \vec{u} \quad \overline{AH} \perp \vec{u} \text{ liés}$$

$$\|\overline{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\overline{HM} \wedge \vec{u}\| = HM \cdot \|\vec{u}\| \sin \frac{\pi}{2} = HM \cdot \|\vec{u}\|$$

$$HM = \frac{\|\overline{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

#### خاصية

في الفضاء  $(D)$  مستقيم مار من  $A$  و موجه بـ  $\vec{u}$  ,  $M$  نقطة من الفضاء.

$$d(M;(D)) = \frac{\|\overline{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ مسافة النقطة } M \text{ عن المستقيم } (D) \text{ هي}$$

#### تمرين

$$d(A;(D)) = ? \quad (D) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad A(3;2;-1)$$

#### تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر  $A(1;2;1)$  و  $B(-2;1;3)$  و  $(D)$  المستقيم الذي

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \text{ معادلته}$$

1- حدد  $\overline{OA} \wedge \overline{OB}$  ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى  $(OAB)$

2- حدد  $d(A;(D))$

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة  $(S)$  التي مركزها  $A$  و مماسة للمستقيم  $(D)$