الدالة الأسية

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضة

I- الدالة الأسية النيبرية

1- تعاريف و خاصيات أولية

نعلم أن دالة $\ln$ تقابل من $]0;+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ و بالتالي تقبل دالة عكسية من $\mathbb{R}$ نحو $]0;+\infty[$

أ- تعريف

الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النيبيري تسمى الدالة الأسية النيبيرية نرمز لها (مؤقتا) بالرمز $\exp$

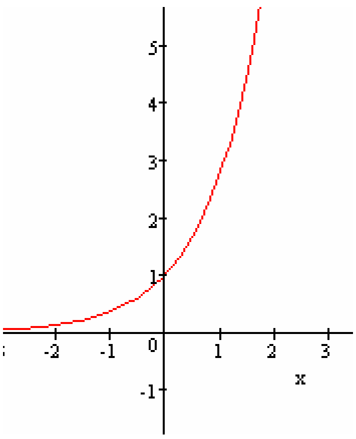
$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \forall y\in]0;+\infty[\qquad \exp(x)=y \iff \ln y=x$$

ب- خاصيات أولية

* $\exp(0)=1 \qquad \exp(1)=e$
* $\exp(x)\succ 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$
* $\ln(\exp(x))=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$
* $\exp(\ln(x))=x \qquad \forall x\in]0;+\infty[$
* الدالة $\exp$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$
* $\exp(a)=\exp(b)\Leftrightarrow a=b \qquad \forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$
* $\exp(a)\succ\exp(b)\Leftrightarrow a\succ b \qquad \forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

2- التمثيل المبياني لدالة exp

في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة $\ln$ و منحنى الدالة $\exp$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول



3- خاصية أساسية

$$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\qquad \exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$$

البرهان

$$\ln(\exp(a)\times\exp(b))=\ln\exp(a)+\ln\exp(b)=a+b$$
$$\ln\exp(a+b)=a+b$$
$$\ln(\exp(a)\times\exp(b))=\ln\exp(a+b)$$
$$\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$$

Moustaouli Mohamed

نـــــتائج

$$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2 \qquad \forall r\in\mathbb{Q} \qquad \exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}$$

$$\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(ra)=[\exp(a)]^r$$

4- كتابة جديدة لدالة exp

نعلم أن $\exp(1)=e$ و بالتالي $\forall r\in\mathbb{Q} \quad \exp(r)=[\exp(1)]^r=e^r$

نمدد هده الكتابة إلى $\mathbb{R}$ أي $\forall x\in\mathbb{R} \quad \exp(x)=e^x$

الخاصيات السابقة تصبح

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \forall y\in]0;+\infty[\qquad e^x=y \Leftrightarrow x=\ln y$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \ln e^x=x \qquad \forall x\in]0;+\infty[\quad e^{\ln x}=x$$

$$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad \forall r\in\mathbb{Q} \quad e^{a+b}=e^a.e^b \qquad e^{-a}=\frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b} \qquad e^{rb}=(e^a)^r$$

$$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$$

$$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad e^a=e^b \Leftrightarrow a\succ b$$

تمرين

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين $\quad e^{x-2}=2 \quad ; \quad e^{2x}-3e^x+2=0$

2- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين $\quad e^{x^2-x}\succ 1 \quad ; \quad e^{3x+1}-2e^{2x+1}+e^{x+1}\prec 0$

5- مشتقة الدالة الأسية النبيرية

أ- بما أن دالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و مشتقتها لا تنعدم على $]0;+\infty[$ فان الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $\quad (e^x)'=\dfrac{1}{\ln'(e^x)}=\dfrac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

خاصية

الدالة $x\to e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\quad (e^x)'=e^x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

ب- خاصية

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدالة $x\to e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I

$$\left[e^{u(x)}\right]'=u'(x)e^{u(x)} \qquad \forall x\in I$$

تمرين حدد الدالة المشتقة للدالة f في الحالتين التاليتين

(a $\quad f(x)=e^{3x^2-x} \qquad$ (b $\quad f(x)=e^{x-x\ln x}$

6- نهايات هامة

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}xe^x=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

نبين $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

نضع $t = e^x$ ومنه $x = \ln t$

وحيث أن $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0^+$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{\ln t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln t}{t}} = +\infty$

<u>تمرين</u> حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

<u>تمرين</u> أدرس و مثل مبيانيا الدالتين f و g حيث $f(x) = \frac{e^x}{x}$ $\quad g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$

II- الدالة الأسية للأساس a

1- تعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و مخالفا للعدد1

الدالة العكسية للدالة Log_a تسمى الدالة الأسية للأساس a و يرمز لها بالرمز $\exp_a$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0;+\infty[\qquad \exp_a(x) = y \Leftrightarrow Log_a(y) = x$$

<u>ملاحظة</u>

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in]0;+\infty[\qquad \exp_a(x) = y \Leftrightarrow Log_a(y) = x \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a} \Leftrightarrow \ln y = x \ln a \Leftrightarrow y = e^{x \ln a}$$

اذن $\exp_a(x) = e^{x\ln a} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

(هذا يعني أن دالة $\exp_a$ هي تركيب الدالة الخطية $x \to x\ln a$ و الدالة الأسية النيبيرية)

2- خاصيات

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \exp_a(x+y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y) \qquad \exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$$

$$\exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)} \qquad \exp_a(rx) = (\exp_a(x))^r$$

3- كتابة أخرى للعدد $\exp_a$

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\} \quad \exp_a(1) = a \qquad (Log_a(a) = 1)$$

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\} \qquad \exp_a(r) = [\exp_a(1)]^r = a^r$$

نمدد هذه الكتابة الى $\mathbb{R}$ فنكتب $\exp_a(x) = a^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall y \in]0;+\infty[\qquad a^x = y \Leftrightarrow x = Log_a(y)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\} \qquad a^x = e^{x\ln a}$$

دراسة الدالة $x \to a^x$

ليكن $a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}$

* الدالة $x \to a^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $(a^x)' = a^x \ln a \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

<u>الحالة1</u> اذا كان $a \succ 1$ فان $\ln a \succ 0$ ومنه الدالة $x \to a^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

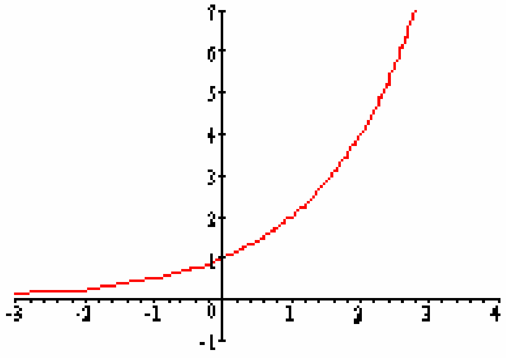
و $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

<u>الحالة2</u> اذا كان $0 \prec a \prec 1$ فان $\ln a \prec 0$ ومنه الدالة $x \to a^x$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

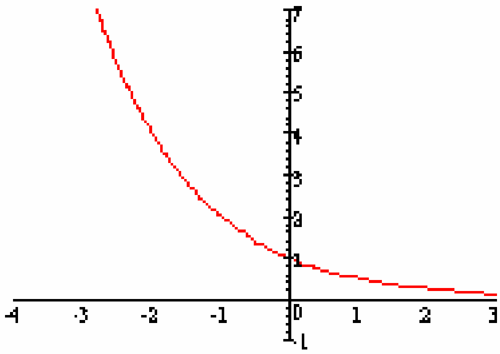
و $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

التمثيل المبياني

$a \succ 1$ $\quad (a=2)$



$0 \prec a \prec 1$ $\quad \left(a=\frac{1}{2}\right)$



<u>ملاحظة</u> نلاحظ $1^x = 1$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ و بالتالي نكتب $\quad a^x = e^{x \ln a}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}^{+*}$