تمارين حول دراسة الدوال- د1-

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1

أدرس f و أنشئ منحناها في الحالات التالية

أ- $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$ ب- $f(x)=2x+\arccos\frac{1}{x}$

د- $\begin{cases} f(x)=(2-x)^{\frac{3}{2}} & x\prec 2 \\ f(x)=-\arctan\sqrt{x-2} & x\geq 2 \end{cases}$

تمرين 2

لتكن f دالة عددية معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{2-x} & x\in[0;1] \\ f(x)=x-\sqrt{x^2-x} & x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\end{cases}$

1- أدرس اتصال f في 0 و 1 وحدد نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$

2- ادرس قابلية اشتقاق f في كل من 0 و1 و أول النتيجتين هندسيا.

3- أحسب $f'(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ و ادرس إشارتها و أعط جدول تغيرات f.

4 - أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم أنشئ C_f $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

تمرين3

لتكن f دالة عددية معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=x-2\arctan(x) & x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{x}{x-1} & x\prec 0 \end{cases}$

1- احسب نهاية f عند $-\infty$, $+\infty$

2- بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 و أعط معادلة المماس لـ C_f عند النقطة ذات الافصول 0.

3- احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ثم ادرس تغيرات f.

4- ادرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم أنشئ C_f

5- ليكن g قصور لـ f على $I=]-\infty;0[$

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجيب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين4

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ بـ $f(x)=\sqrt{2x+1}-\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$

1- أ- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$ و أول النتائج هـــــــــــندسيا .

ب- حدد $f'(x)$ لكل x من $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ و أعط جدول تغيرات f

2- أ- بين أن $f''(x)=(2x+1)^{\frac{-5}{2}}(1-x)$ $\forall x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

ب- بين أن النقطة A ذات الافصول 1 نقطة انعطــاف لـ (C_f)

4- أنشئ (C_f) $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm)$

5- ليكن g تقابل من $[0;+\infty[$ نحو مجال J يجيب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين5

نعتبر الدالة f المعرفة على $D=]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$ بـما يلي $f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}$

1- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to0^+} f(x)$

2- أ- تحقـق من أن $\frac{f(x)}{x+1}=\frac{x^2-x+1}{x^2\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}$ $\forall x\in D-\{-1\}$

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على اليسار في-1 ثم أعـط تأويلا هـندسيا للنتيجة.

3- بين أن $f'(x)=\frac{-3}{2x^3\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}$ $\forall x\in D-\{-1\}$ و أعط جدول تغيـرات الدالة f

4- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنشئ (C_f)

5- أ- لتكن g قصور الدالة f على $]-\infty;-1]$ نحو مجال I ينبغي تحديـده.

ب – حـدد $g^{-1}(x)$ لكــل x من I

تمرين6

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$

1- أحســب $f(1)$ وحـدد D_f

2- أ- أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 2- ثم أول النتـيجة هندسـيا.

ب- أدرس قابلية اشتقاق f في 1 ثم أول النتيجة هندسـيا.

3- أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-2;1[\cup]1,+\infty[$ و أعط جـدول تغـيرات f

4- أدرس الفـروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنـشئ (C_f)

تمرين7

نعتبر الدالة f المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}} & x\succ 0 \\ f(x)=-\frac{x}{2}+\arctan x & x\le 0 \end{cases}$$

1- أ- حـدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- تأكد أن f متصلة في0 .

2- أدرس اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ثم اليسار في0 و أول النتيجتيـن هندسيا.

3- أ- بين أن f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

ب- حـدد $f'(x)$ لكـل x من $]-\infty,0[$.

ج- أعـط جـدول التغيرات f.

4- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنـشئ (C_f)

أ- لتكن g قصور الدالة f على $]0;+\infty[$ نحو مجال I ينبغي تحديده

ب - حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من I

تمرين 8

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{3}x-\sqrt[3]{x} & x\ge 0 \\ f(x)=\frac{x}{x^2+1}+\arctan x & x\prec 0 \end{cases}$$

1- أحسب $f(8)$; $f(3\sqrt{3})$; $f(-1)$

2- أدرس اشتقاق الدالة f على يمين 0 و يسار 0 ثم أول النتيجتين هندسيا.
3- بين أن

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$\forall x \in]-\infty;0[\qquad f'(x)=\frac{2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

4- حدد جدول تغيرات f
5- أ- أدرس الفروع اللانهائية
ب- أنشئ منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم.م.م.
6- ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1;+\infty[$
أ- بين أن g تقابل من $]1;+\infty[$ نحو مجال يجيب تحديده
ب- أنشئ منحنى الدالة g^{-1}

تمرين9

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي $f(x)=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)$

1 - أدرس اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا
2 - احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ و أعط جدول تغيرات f
3- ا – ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f
ب- بين أن $A(1\ ;\ 0)$ نقطة انعطاف للمنحنى C_f ثم أعط معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة.
ج- أنشئ في معلم .م. م المنحنى C_f $\|\vec{i}\| = 4cm$
4- ليكن g قصور الدالة f على $I=\left[\frac{1}{8}\ ;+\infty\right[$
بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجيب تحديده و حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J ثم أنشئ $C_{g^{-1}}$

تمرين10

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x(x-2)} & x\in]-\infty;0]\cup[2;+\infty[\\ f(x)=x-\sqrt{2x} & x\in]0;2[\end{cases}$$

1- أحسب $f(4)\ ;\ f(-2)$
2- تأكد أن f متصلة في 0 و 2
3- أدرس اشتقاق f على اليمين و اليسار في كل من النقطتين 0 و 2 . و أول النتائج هندسيا .
4- أ – بين أن

$$\forall x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[\qquad f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x(x-2)}\right)^2}\right)$$

$$\forall x\in]0;2[\qquad f'(x)=\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$$

ب- أعط جدول تغيرات f
1- أدرس الفروع اللانهائية و أنشئ C_f
2- ليكن g قصور الدالة f على $I=[2;+\infty[$
أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

ب- أنشئ المنحنى $C_{g^{-1}}$

تمرين11

I- لتكن h الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي $h(x)=3x-4x\sqrt{x}-\frac{1}{4}$

1- أعط جدول تغيرات الدالة h على $\mathbb{R}^+$

2- استنتج أن $h(x)\leq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

II- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي $f(x)=(4x-1)\sqrt{x}-4x^2+\frac{1}{2}$

1- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا.

2- أ- بين أن $f'(x)=\frac{2h(x)}{\sqrt{x}}$ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f .

3- ليكن g قصور الدالة f على $I=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب- استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ $x\in I$ تقبل حلا وحيدا α من $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$

4- أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم المنحنيين C_f و $C_{g^{-1}}$.

(نقبل أن لـ C_f نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{1}{4}$).

تمرين 12

نعتبر f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ $f(x)=1-\frac{x}{4}\left(\sqrt{x}-2\right)^2$

1- بين أن f قابلة الاشتقاق على يمين 0 .

2- بين أن $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

3- أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f.

ب- بين أن لـ C_f نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتيها .

4- ليكن g قصور الدالة f على $I=[4;+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب- استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ $x\in I$ تقبل حلا وحيدا α من $\left]\frac{64}{9};\frac{121}{16}\right[$.

ج- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J. ثم استنتج أن $\alpha=4+2\sqrt{3}$

د- أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم المنحنيين C_f و$C_{g^{-1}}$.

تمرين13

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي $f(x)=2\arctan\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

1- أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t}$

ت- بين أن $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ و أول النتيجة هندسيا

-2 أدرس التغيرات الدالة f

-3 أنشئ المنحنى C_f

-4 نعتبر الدالة g قصور f على $I=[1;+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجيب تحديده

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

-5 بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $[1;2]$

-6 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـما يلي $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

أ- أثبت أن $f(2)\succ\frac{\pi}{3}$

ب- بين أنه $1\le u_n\le 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ت- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

د- استنتج أن $\lim u_n=\alpha$

تمرين14

I- 1) بين أن $1-x^2\le\frac{1}{1+x^2}\le 1-x^2+x^4 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

2) لتكن h الدالة المعرفة على بـ $h(x)=\arctan x-x+\frac{1}{3}x^3$

أ- بين أن $|h'(x)|\le x^4 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

ب- استنتج أن $|h(x)-h(0)|\le x^5 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

ج- بين أن $\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{x^2}=0$

II- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{x}{2x^2+2x+1}-\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$

-1 أدرس تغيرات g (النهايات ، $g'(x)$ ، جدول التغيرات)

-2 بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا غير منعدم α ينتمي إلى $\left]-1;\frac{-1}{2}\right[$

-3 استنتج إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$

III- لتكن f الدالة المعرفة بما يلي
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-x}{x} & x\in]-1;0[\cup]1;+\infty[\\ f(0)=0 \quad ; \quad f(-1)=\dfrac{\pi}{2}-1 \end{cases}$$

-1 بين أن f متصلة على $[-1;+\infty[$

-2 أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;0[\cup]1;+\infty[$ و استنتج تغيرات الدالة f

-3أ- باستعمال السؤال (I -2 – ج) أحسب $\lim_{x\to0}\frac{\arctan\frac{x}{x+1}-x}{x^2}$ ثم أول النتيجة هندسيا.

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين1-

4 - أنشئ المنحنى C_f (نأخذ $\alpha=-\frac{3}{4}$; $f(\alpha)=\frac{2}{3}$)

تمرين15

I- نعتبر الدالة g_m المعرفة على $[1;+\infty[$ بما يلي $g_m(x)=m\sqrt[3]{x-1}-1$ حيث m بارامتر حقيقي غير منعدم

1- أدرس حسب قيم m تغيرات الدالة g_m

2- حل في $\mathbb{R}$ حسب قيم m المعادلة $g_m(x)=1$

II- نفترض فيما تبقى من الأسئلة أن $m\geq 2$

لتكن f_m الدالة العددية المعرفة بـ

$$\begin{cases} f_m(x)=\arcsin\left(\dfrac{1}{g_m(x)}\right) & ; \quad x\geq 1+\left(\dfrac{2}{m}\right)^3 \\ f_m(x)=\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{2-x} & ; \quad x\prec 1+\left(\dfrac{2}{m}\right)^3 \end{cases}$$

1- أ- تحقق أن الدالة f_m معرفة على $\mathbb{R}$

ب- أدرس حسب قيم m اتصال الدالة f_m في $x_0=1+\left(\dfrac{2}{m}\right)^3$

2- حدد منحى تغيرات f_m

3- نرمز بـ C_2 لمنحنى f_2 في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ- أحسب $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f_2(x)-\frac{\pi}{2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f_2(x)-\frac{\pi}{2}}{x-2}$ و أول النتيجتين هندسيا.

ب- أعط جدول تغيرات f_2

ج- حدد الفرعين اللانهائيين لـ C_2 و أنشئ C_2

تمرين16

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$

1- أدرس تغيرات الدالة g

2- بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلاوحيدا ينبغي تحديده

II - لتكن f الدالة المعرفة بما يلي $f(x)=\arcsin(g(x))$

1- حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2- أحسب $\lim\limits_{x\to \frac{7}{2}^+}\dfrac{f(x)-\frac{\pi}{2}}{x-\frac{7}{2}}$ و أول النتيجة هندسيا

3- أعط جدول تغيرات الدالة f

4- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى C_f و أنشئ C_f

5- بين أن f تقابل من D_f نحو مجال I ينبغي تحديده ثم حدد $f^{-}(x)$ لكل x من I

تمرين17

I- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي

$$\begin{cases} f(x)=-x+\sqrt{x^2+1} & x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{4}{\pi}\arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) & x\prec 0 \end{cases}$$

1- أ- أدرس اتصال f في النقطة 0

ب- أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 0

2- أ- بين أن $f'(x)\prec 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

ب- أعط جدول تغيرات محددا نهايتيها في $+\infty$ و $-\infty$

3- أنشئ C_f ($\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

4- نضع $I=\left[\frac{1}{4};1\right]$. بين أن $f(I)\subset I$

II- نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_0=1 \quad ; \quad u_{n+1}=f(u_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1- بين أن $|f'(x)|\prec\frac{4}{5} \quad \forall x\in I$

2- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أن $\left|u_n-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|\prec\frac{4}{5}\left|u_{n-1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right| \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

3- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها

4- بين أن $\tan\frac{x}{2}=f\left(\frac{1}{\tan x}\right) \quad \forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

5- نضع $a_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

أ- تحقق أن $a_0=1 \quad ; \quad a_{n+1}=2^{n+1}-a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب- بين أن $u_n=\tan\frac{\pi a_n}{2^{n+2}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

تمرين18

I - لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

1- أعط جدول تغيرات f وتحقق أن $f([1;2])=[1;2]$

2- أ- حدد أفاصيل نقط انعطاف المنحنى C_f

ب- أنشئ C_f في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

II – لتكن g الدالة العددية لمتغير الحقيقي حيث $g(x)=\arcsin(f(x))$

1- أ- حدد D_g و أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ب- أدرس قابلية اشتقاق g في 0 على اليسار

ج- أعط جدول تغيرات g

2- أ- أثبت أنه $\arcsin t\geq t \quad \forall t\in[0;1]$

ب- استنتج الوضع النسبي للمنحنيين C_f و C_g على $]-\infty;0]$

3- أرسم بلون مغاير، المنحنى C_g في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

(تحديد نقط الانعطاف غير مطلوب)

III- نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_0=2 \quad ; \quad u_{n+1}=f(u_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

نضع $w_n=u_{2n+1} \quad ; \quad v_n=u_{2n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1- تحقق أنه $u_n\in[1;2] \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2- بين أنه $w_n\prec v_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ (يمكن استعمال كون $f\circ f$ تزايدية على $[1;2]$

3- بين أن (v_n) تناقصية و أن (w_n) تزايدية

4- أ- بين أنه $\forall x \in [1;+\infty[\quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

ب- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $f \circ f$ ،

بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \prec v_n - w_n \prec \left(\frac{1}{4}\right)^2 (v_{n-1} - w_{n-1})$

ج- استنتج أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) متحاديتان