المظاهر الطاقية

I ـ شغل قوة

1 ـ شغل قوة ثابتة (تذكير)

نعبر عن شغل قوة ثابتة $\vec{F}$ عند انتقال نقطة تأثيرها من A إلى نقطة B بالعلاقة التالية :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB.\cos\alpha$$

بحيث أن α الزاوية بين $\vec{F}$ و $\overrightarrow{AB}$

AB المسافة الفاصلة بين النقطة A و النقطة B تسمى بالانتقال ونعبر عنها بالمتر (m)

F شدة القوة ب (N)

$W_{A\to B}(\vec{F})$ شغل القوة $\vec{F}$ ونعبر عنه بالجول (J)

* لا يتعلق شغل قوة ثابتة بالمسار المتبع من طرف نقطة التأثير بل يتعلق بموضعيها البدئي والنهائي .

2 ـ الشغل الجزئي لقوة غير ثابتة

نعتبر قوة $\vec{F}$ غير ثابتة ونقطة تأثيرها تنتقل من A إلى B .

لحساب شغل غير ثابتة نجزء المسار إلى مسارات جزئية $\overrightarrow{\delta\ell}$ متناهية في الصغر تسمح باعتبار $\vec{F}$ ثابتة في كل منها .

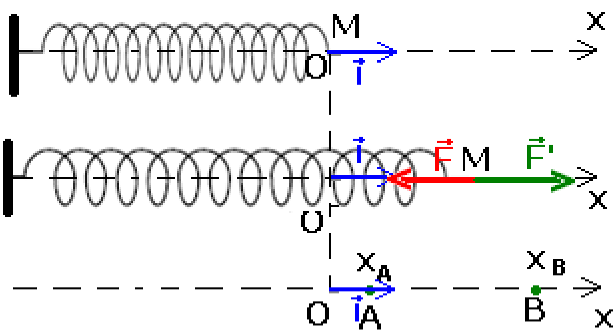
تعبير الشغل الجزئي للقوة $\vec{F}$ خلال الانتقال الجزئي $\overrightarrow{\delta\ell}$ هو : $\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{\delta\ell}$

الشغل الكلي للقوة المتغيرة $\vec{F}$ هو مجموع الأشغال الجزئية :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \sum_A^B \delta W(\vec{F}) = \sum_A^B \vec{F}.\overrightarrow{\delta\ell}$$

3 ـ شغل القوة الخارجية المطبقة من طرف نابض

نعتبر نابضا R ذا لفات غير متصلة صلابته k وكتلته مهملة ، في وضع أفقي على مستوى أفقي . نثبت أحد طرفيه بحامل ثابت .



نطبق على النابض عند طرفه الحر M قوة $\vec{F}'$ ، فيطال النابض بحيث تنتقل النقطة M بالمقدار $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.

تمثل النقطة O موضع M في الحالة البدئية للنابض .

حسب القانون الثالث لنيوتن ، قانون التأثيرات المتبادلة ، فإن النابض يطبق قوة $\vec{F}$ على المجرب وهي قوة ارتداد $\vec{F} = -\vec{F}'$ بحيث أن $\vec{F} = -kx\vec{i}$ أي أن $\vec{F}' = kx\vec{i}$ أي أن $\vec{F}'$ تتعلق بالأفصول x إذن فهي غير ثابتة .

تعبير شغل القوة $\vec{F}'$ عندما ينتقل طرف النابض من A إلى B

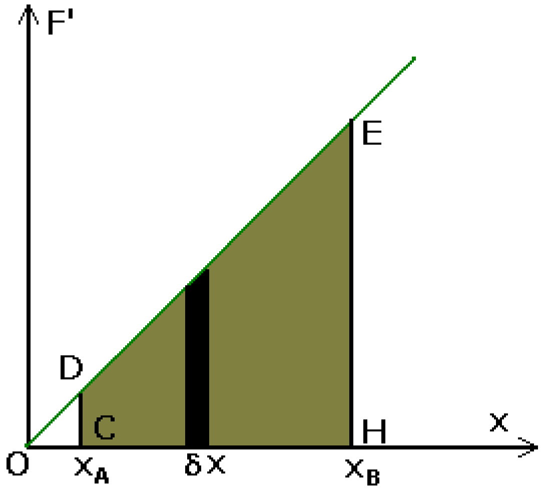
$$W_{A\to B}(\vec{F}') = \sum_A^B \delta W(\vec{F}') = \sum_A^B \vec{F}'.\overrightarrow{\delta\ell} = \sum_A^B kx\vec{i}.\delta x.\vec{i}$$

يمكن استعمال طريقتين لتحديد هذا المجموع :

أ ـ الطريقة المبيانية :

في نظمة محورين نمثل تغيرات F بدلالة الأفصول x وهي إطالة النابض . $F = kx$ أي أنها دالة خطية تمر من أصل النظمة .

يوافق الشغل الجزئي $\delta W(\vec{F}') = k.x.\delta x$ مساحة المستطيل الجزئي بالأسود المبين في الشكل جانبه .



عند انتقال النقطة M من A أفصولها x_A إلى B أفصولها x_B ،

فإن الشغل الكلي للقوة $\vec{F}'$ يوافقه مجموع مساحات المستطيلات الجزئية ويساوي مساحة شبه المنحرف $CDEF$

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}'\right)=a_{CDEF}=a_{OEH}-a_{OCD}$$

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}'\right)=\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2$$

ب ـ الطريقة التحليلية

نعوض في العلاقة السابقة المجموع $\sum$ بالتكامل $\int$

ولانتقال الجزئي $\delta\ell$ ب المقدار التفاضلي dx فنحصل على العلاقة التالية :

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}'\right)=\int_{x_A}^{x_B}kxdx=\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_A}^{x_B}$$

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}'\right)=\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2$$

خلاصة :

تعبير شغل قوة المطبقة من طرف مجرب على الطرف الحر لنابض يجعله ينتقل من موضع A إلى موضع B أفصولهما على التوالي x_A و x_B هو : $\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}'\right)=\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2$.

وبما أن $\vec{F}=-\vec{F}'$ فإن شغل قوة الارتداد المطبقة من طرف النابض هو : $\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}\right)=\frac{1}{2}kx_A^2-\frac{1}{2}kx_B^2$

يتعلق شغل قوة الارتداد $\vec{F}$ بالموضع البدئي والموضع النهائي لمركز قصور الجسم .

II ـ طاقة الوضع المرنة

عندما يكون النابض مضغوطا أو مطالا فإنه يختزن يختزن طاقة ترتبط بحالة تشوهه تسمى طاقة الوضع المرنة . في الحالة التي يكون فيها النابض لا مطالا ولا مضغوطا فإن طاقة الوضع المرنة تكون منعدمة .

عندما يطبق المجرب قوة $\vec{F}'$ على الطرف الحر للنابض لجعل نقطة تأثيره تنتقل من النقطة A أفصولها x_A في حالة سكون إلى النقطة B أفصولها x_B حيث توجد كذلك في حالة سكون ، فإنه حسب مبرهنة الطاقة الحركية لدينا :

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}\right)+\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}'\right)=0\Rightarrow\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}\right)=-\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}'\right)$$

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}\right)=\frac{1}{2}kx_A^2-\frac{1}{2}kx_B^2$$

أي أن الشغل المطبق من طرف المجرب على طرف النابض يساوي تغير شكل من أشكال الطاقة للمجموعة { المجرب ، النابض } وهي طاقة وضع مرنة .

نضع أن $\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}\right)=E_{Pe}(A)-E_{Pe}(B)$

نعرف طاقة الوضع المرنة لمجموعة مكونة من { جسم ـ نابض } في وضع أفقي هي الطاقة التي تختزنه هذه المجموعة من جراء تشويه الجسم وتعبيرها هو : $E_{pe}=\frac{1}{2}kx^2+C$.

C ثابتة تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية لطاقة الوضع المرنة .

وبصفة عامة نختار طاقة الوضع المرنة منعدمة في الموضع الموافق للأفصول $x=0$ حيث $(C=0)$

فيكون تعبير طاقة الوضع المرنة هو : $E_{pe}=\frac{1}{2}kx^2$ وحدتها في النظام العالمي للوحدات هي الجول . و x إطالة النابض و k صلابته .

ملحوظة : $_{A}^{B}\Delta E_{pe}=-\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}\right)$

III ـ الدراسة الطاقية للمجموعة { جسم صلب ، نابض } في وضع أفقي .

1 ـ الطاقة الحركية للمجموعة .

يتوفر الجسم الصلب غير قابل للتشويه كتلته m وسرعته v في إزاحة بالنسبة لمرجع معين ، على طاقة حركية E_C بحيث $E_C=\frac{1}{2}mv^2$ وحدة E_C في النظام العالمي للوحدات هي الجول .

بما أن الجسم في حركة إزاحة ، فإن سرعة الجسم الصلب هي سرعة مركز قصوره .
بالنسبة لمتذبذب مرن ، الطاقة الحركية لهذا المتذبذب هي الطاقة الحركية للجسم الصلب .

$E_C=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ بحيث أن $x=x_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

2 ـ الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

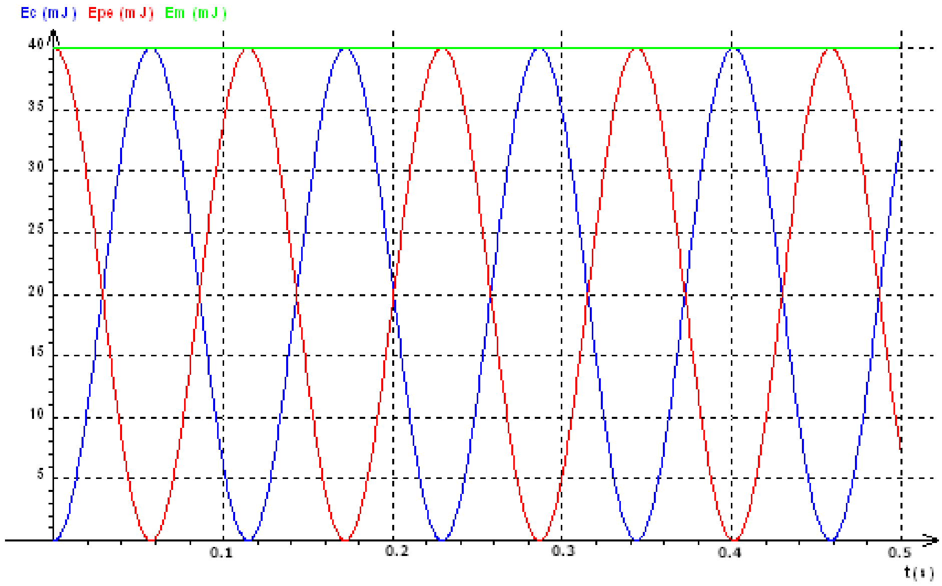
تعريف بالطاقة الميكانيكية :

في مرجع معين الطاقة الميكانيكية لمجموعة ما في لحظة t هي مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع لهذه المجموعة .

طاقة الوضع لمتذبذب مرن أفقي هي مجموع طاقة وضعه الثقالية وطاقة وضعه المرنة $E_P=E_{pp}+E_{Pe}$

نختار الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية منطبقة مع المستوى الأفقي المار من G مركز قصور المتذبذب $(E_{PP}=0)$ نحصل على $E_P=E_{Pe}$ أي أن تعبير الطاقة الميكانيكية لمجموعة مكونة من جسم صلب ونابض أفقي هو : $E_m=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2+C$

باختيار حالة مرجعية لطاقة الوضع المرنة وهي : $E_{pe}=0$ عند التوازن أي ان $x=0$ نحصل على التعبير التالي : $E_m=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$



أ ـ حالة إهمال الاحتكاكات

في هذه الحالة يبقى وسع التذبذبات x_m ثابتا ، فنحصل على نظام دوري دوره الخاص T_0 ، فيكون عندنا انحفاظ الطاقة الميكانيكية للمجموعة . $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ مهما كانت قيم x و v

ـ عندما تأخذ الاستطالة قيمتها القصوية x_m فإن الطاقة الميكانيكية $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2$

ـ عنما تكون الاستطالة منعدمة $x = 0$ فإن $E_m = \frac{1}{2}mv_m^2$ وبالتالي فإن $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$ ومنه

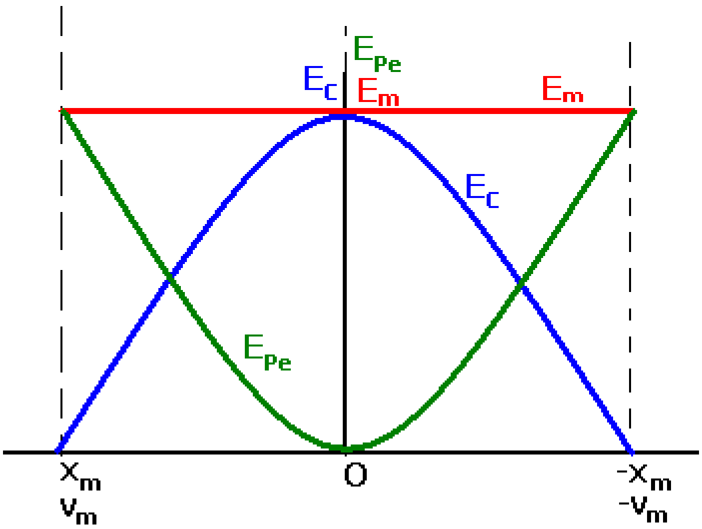
نستنتج العلاقة : $v_m = x_m\sqrt{\frac{k}{m}}$

كذلك يمكن أن نحصل على المعادلة التفاضلية للمتذبذب انطلاقا من الطاقة الميكانيكية أي بعملية اشتقاقها بالنسبة للزمن :

$$\frac{dE_m}{dt} = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

مخططات الطاقة للنواس المرن الأفقي :

تمثيل على نفس النظمة E_{Pe} و E_C و E_m



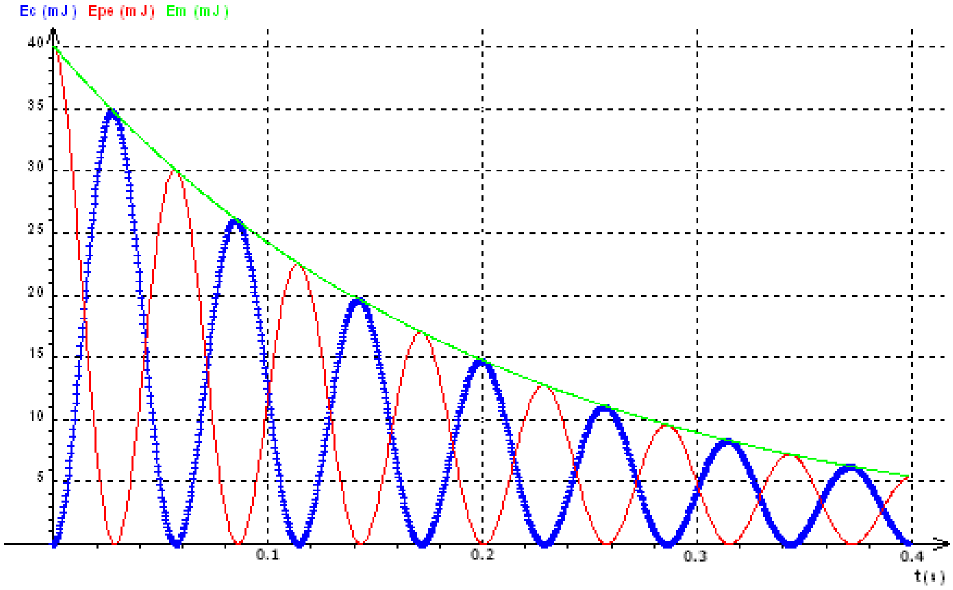
خلاصة : في غياب الاحتكاكات تنحفظ الطاقة الميكانيكية لنواس مرن أفقي وحر .

ب ـ حالة احتكاكات غير مهملة .

في هذه الحالة يتناقص وسع الذبذبات تدريجيا مع الزمن t ، فنحصل على نظام شبه دوري أو لا دوري في حالة احتكاكات مهمة .

يعزى تناقص الطاقة الميكانيكية للمجموعة مع الزمن t إلى الانتقال الحراري (وجود الاحتكاكات)

شكل منحنى تغيرات E_{pe} و E_C و E_m بدلالة الزمن :



IV ـ الدراسة الطاقية لنواس اللي .

1 ـ الطاقة الحركية للمجموعة .

المجموعة المتذبذبة هي { القضيب ـ السلك }

بما أن السلك كتلته مهملة فإن الطاقة الحركية لنواس اللي تنحصر في الطاقة الحركية للقضيب ، وبما أنه في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) سيكون تعبير الطاقة الحركية على الشكل التالي :

$E_C=\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$ حيث J_Δ عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور (Δ) المجسد من طرف السلك و $\dot{\theta}$ السرعة الزاوية لدوران القضيب .

2 ـ طاقة الوضع للي المجموعة .

نعتبر نواس لي ثابتة ليه C في حركة تذبذبية حول محور (Δ) يجسده السلك ، عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ . نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على هذه المجموعة بين موضعين أفصولهما الزاوي تباعا : θ_1 و θ_2 .

جرد القوى المطبقة على القضيب أثناء حركته : $\vec{P}$ وزن القضيب وتأثير السلك على القضيب $\vec{R}$ وإلى مزدوجة اللي عزمها $\mathcal{M}_C=-C.\theta$ ،

نطبق المبرهنة : $\frac{1}{2}J_\Delta\theta_2^2-\frac{1}{2}J_\Delta\theta_1^2=W(\vec{P})+W(\vec{R})+W_C$ بما أن خط تأثير القوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يتقاطعان مع المحور (Δ) فإن شغلهما منعدم أي أن $\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_2^2-\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_1^2=W_C$

نعلم أن المعادلة الزمنية لحركة المجموعة المتذبذبة هي على الشكل التالي : $\theta=\theta_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

نأخذ $\varphi=0$ لتبسيط العمليات الحسابية .

$\theta_1=\theta_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t_1\right)$ و $\theta_2=\theta_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t_2\right)$ أي أن $\dot{\theta}_1=-\theta_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t_1\right)$ و

$\dot{\theta}_2=-\theta_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t_2\right)$ وبتعويض هذه التعابير في العلاقة (1) $W_C=\frac{1}{2}C\theta_1^2-\frac{1}{2}C\theta_2^2$

هذه العلاقة تمثل شغل مزدوجة اللي عندما يتغير الأفصول الزاوي من θ_1 إلى θ_2 . أي أن شغل مزدوجة اللي يساوي تغير شكل من أشكال الطاقة للمجموعة { القضيب ـ السلك } وهي طاقة الوضع للي . $W_C = E_{pt}(1) - E_{pt}(2)$ بحيث أن $E_{pt}(1) = \frac{1}{2}C\theta_1^2$ و $E_{pt}(2) = \frac{1}{2}C\theta_2^2$ وبالتالي نعرف طاقة الوضع للي بالمقدار التالي : $E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$ ، Cte ثابتة تتعلق بالحالة المرجعية وتحدده الشروط البدئية

3 ـ الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس اللي هو : $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$.

أ ـ في حالة احتكاكات مهملة .

نعتبر أن التذبذبات الأولى لنواس لي حر غير مخمدة معادلته التفاضلية $J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta = 0$.

انطلاقا من تعبير الطاقة الميكانيكية يمكن أن نبين أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية للمجموعة وذلك باشتقاق تعبير E_m بالنسبة للزمن :

$$\frac{dE_m}{dt} = J_\Delta\ddot{\theta}\dot{\theta} + C\dot{\theta}\theta = \dot{\theta}\left(J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta\right) = 0 \Rightarrow E_m = cte$$

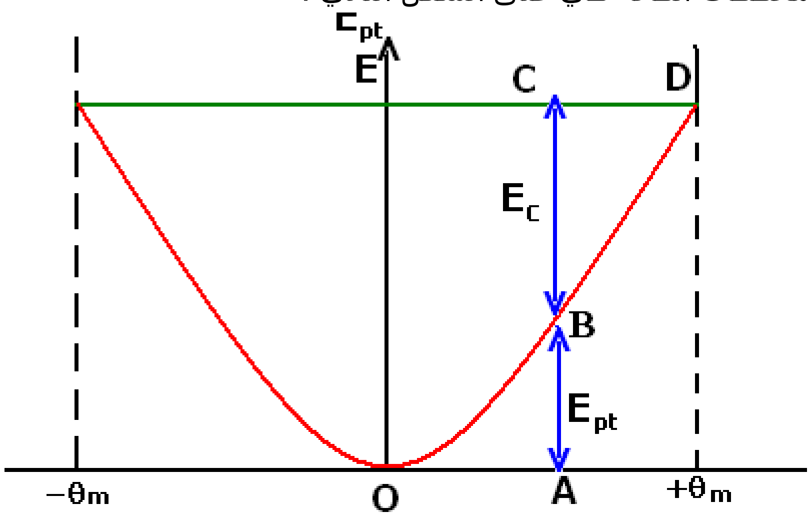
أي أن الطاقة الميكانيكية تنحفظ .

ويمكن أن نبين كذلك انطلاقا من المعادلة الزمنية $\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ أن هذه الثابتة هي :

$$E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 = cte$$

خلاصة : تنحفظ الطاقة الميكانيكية لنوس لي حر وغير مخمد : $E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 = cte$

مخططات الطاقة هي على الشكل التالي :



من خلال مخططات الطاقة يتبين أنه خلال الذبذبات الحرة غي المخمدة لنواس لي تتحول الطاقة الحركية إلى طاقة وضع والعكس صحيح .

ب ـ في حالة وجود الاحتكاك

تتناقص الطاقة الميكانيكة للنواس اللي بحيث تتحول إلى طاقة حرارية .

V ـ الدراسة الطاقية للنواس الوازن

تعتبر المجموعة النواس الوازن {الحامل ـ الجسم S } بحيث أن J_Δ عزم قصور الجسم S ونمعلم حركة مركز قصوره بالأفصول الزاوي θ عند كل لحظة t بالنسبة لمعلم مرتبط بمرجع أرضي .

ـ الطاقة الحركية للمجموعة : يتوفر النواس الوازن على طاقة حركية في المرجع المرتبط بالأرض :

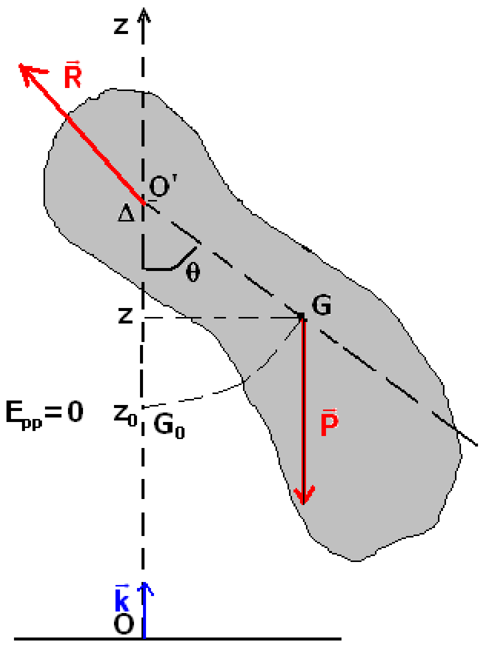
$$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$$

ـ طاقة الوضع الثقالية للمجموعة

تعبير طاقة الوضع الثقالية لنواس وازن في مجال الثقالة هو :

$E_{pp} = mgz + cte$ حيث m كتلة الجسم S وz أنسوب مركز قصوره في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ متعامد وممنظم محوره $(O, \vec{k})$ رأسي وموجه نحو الأعلى ، و g شدة الثقالة .

الثابتة cte تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية .



ـ الطاقة الميكانيكية للنواس الوازن.

$$E_m = E_C + E_{pp}$$

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس وازن في معلم مرتبط بمرجع أرضي هو :

$$E_m = mgz + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + cte$$

مثال :

حسب الشكل : $z = z_0 + h$ بحيث أن

$h = O'G - O'G\cos\theta$ نضع $O'G = d$

$$z = z_0 + d(1 - \cos\theta)$$

يمكن تحديد الثابتة cte انطلاقا من الحالة المرجعية :

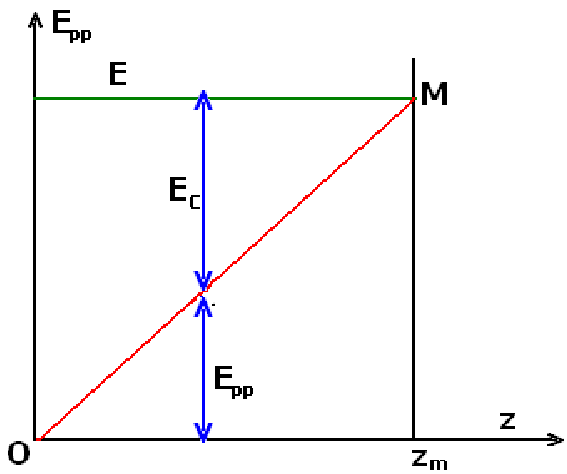
$E_{pp} = 0$ عند $z = z_0$ أي أن $cte = -mgz_0$

$$E_m = mgd(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = mg\dot{\theta}\sin\theta + J_\Delta \dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$= \dot{\theta}\left(mgd\sin\theta + J_\Delta \ddot{\theta}\right) = 0$$

$$E_m = cte$$



في غياب للاحتكاكات تبقى الطاقة الميكانيكية للنواس الوازن في مجال الثقالة ثابتة . __إذن النواس الوازن__ __مجموعة محافظة__

ـ مخططات الطاقة

أ ـ الحالة العامة

* التمثيل المبياني لتغيرات طاقة الوضع الثقالية بدلالة الأنسوب z .

$$E_{pp} = mgz$$

$$E_m = g(z) = cte$$

$$E_m - E_{pp} = E_c$$

الطاقة الحركية إما موجبة أو منعدمة.

في النقطة M $E_{pp} = mgz_M$ و $E_C = 0$

$$E_m = E_{pp} = mgz_M$$

أي أن z لايمكنها أن تتجاوز z_M يعني أن $z < z_M$

في النقطة O : $E_{pp} = 0$ و $E_C = E_m = \frac{1}{2} mv_{\max}^2$

عندما تزداد z تنقص الطاقة الحركية E_C تزداد طاقة الوضع E_{pp} إلى أن تصبح $z = z_m$ فيتوقف الجسم أي أن $E_C = 0$

ب ـ حالة النواس الوازن

ـ طاقة الوضع الثقالية للنواس الوازن نختار كحالة مرجعية $E_{pp} = 0$ بالنسبة $z=z_0$ في هذه الحالة

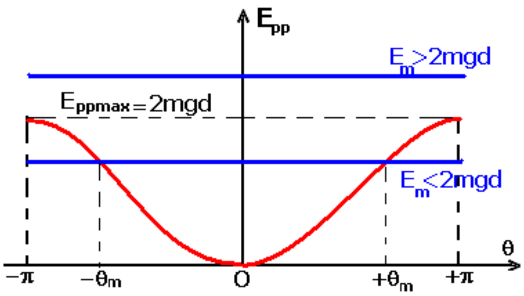
$$E_{pp} = mgd(1 - \cos\theta)$$

ـ مخططات الطاقة

$E_m = E_{pp} + E_C$ الطاقة الميكانيكية وهي ثابتة بالنسبة للنواس الوازن

$E_{pp} = mgd(1 - \cos\theta)$ طاقة الوضع الثقالية $E_{pp} = f(\theta)$

حساب تغيرات $E_{pp}(\theta)$



$$\frac{dE}{d\theta} = mgd\dot{\theta}\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$$

$\theta = -\pi$ أو $\theta = \pi$

$$-\pi \le \theta \le \pi$$

$$0 \le E_{pp} \le 2mgd$$

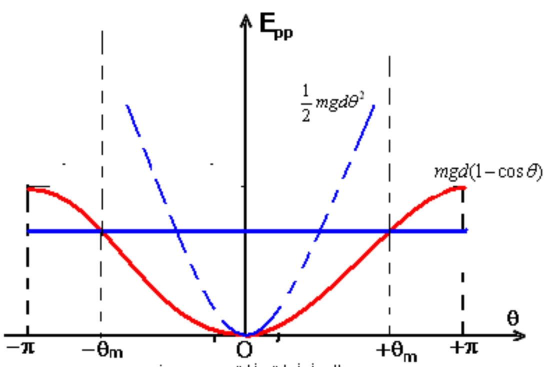
ـالحالة الأولى:

$E_m > 2mgd$ و $E_m = E_{pp} + E_C$ أي أن $E_C > 0$

وبالتالي فالنواس الوازن لايتوقف ويمكنه ان يدور حول المحور (Δ)

ـ الحالة الثانية :

$E_m < 2mgd$ أي أن $E_C = E_m - E_{pp}$ وبما أن $E_C \ge 0$ في هذه الحالة تنعدم الطاقة الحركية للنواس الوازن بالنسبة لقيمتين θ_m و $-\theta_m$ في هذه الحالة للمجموعة حركة تذبذبية حرة وغير مغمدة تتحول خلالها الطاقة الحركية إلى طاقة وضع ثقالية $\Delta E_C = -\Delta E_{pp}$.



مجال ذبذبات ذات وسع صغير

في حالة ذبذبات ذات وسع صغير $\sin\theta \approx \theta$ sinθ ≅θ و

$$\cos\theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$E_P = mgd\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = mgd\frac{\theta^2}{2}$$